This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

The Gift of

WILLIAM H. BUTTS, Ph.D.

A.B. 1878 A.M. 1879

Teacher of Mathematics

1898 to 1922

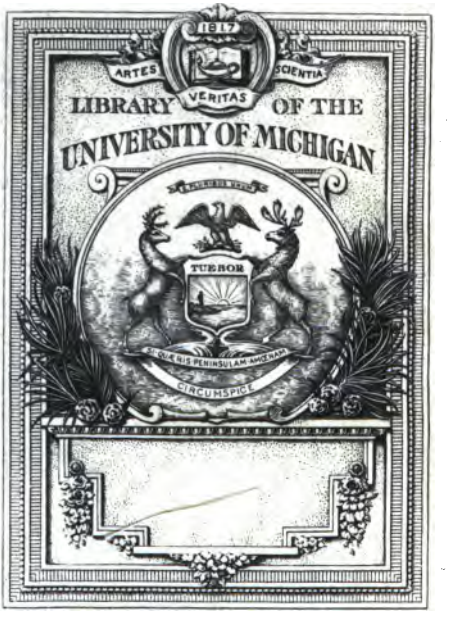
Assistant Dean, College of Engineering

1908 to 1922

Professor Emeritus

1922

QA
35
.L24


1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

OUVRAGES
DE
MATHEMATIQUE
DU R. P. BERNARD LAMY,
Prêtre de l'Oratoire.

DIVISEZ EN TROIS VOLUMES.

TOME PREMIER,
CONTENANT

LES ELEMENS DE MATHEMATIQUE,
OU
LE TRAITÉ DE LA GRANDEUR EN GENERAL,
QUI COMPREND L'ARITHMETIQUE, L'ALGEBRE, ET L'ANALYSE.

A AMSTERDAM,
Chez PIERRE MORTIER.
M. DCC. XXXIV.

A AMSTERDAM Chez PIERRE MORTIER. 1733.

ELEMENS
DES
MATHEMATIQUES,
OU
TRAITE
DE LA GRANDEUR
EN GENERAL,
Qui comprend
L'ARITHMETIQUE,
L'ALGEBRE, L'ANALYSE,
Et les principes de toutes les Sciences qui ont la Grandeur pour objet.

Par le R. P. BERNARD LAMY, *Prêtre de l'Oratoire.*

Cinquieme Edition, revue & augmentée.

A AMSTERDAM,
Chez PIERRE MORTIER.
M. DCC. XXXIII.

Gift
Professor William H. Butts
10-14-1935
v.1-3

PREFACE.

LEs Peres de l'Egliſe jugeoient l'étude des Lettres humaines ſi néceſſaire, qu'ils regarderent la défenſe que Julien l'Apoſtat fit aux Chrétiens de les étudier, comme un ſtratagême du Démon, ſemblable à celui dont ſe ſervirent les Philiſtins pour ôter aux Iſraëlites les moyens de ſe défendre, en les empêchant de faire aucun ouvrage de fer. Les Mathématiques tenant donc entre les Sciences humaines un des prémiers rangs, l'on ne peut pas, ſous prétexte de pieté, en défendre l'étude à la Jeuneſſe. Elles ſont nommées Mathématiques, nom qui veut dire Diſcipline, parce que l'on n'apprend rien de plus conſiderable dans les Ecoles, & qu'elles renferment tant de choſes, qu'il n'y a point de Profeſſion à qui elles ne puiſſent être utiles. L'Arithmetique, l'Algebre, la Géometrie, l'Aſtrono-

10-18-37. NRL

mie, la Chronologie, la Géographie, la Gnomonique, l'Arpentage, l'Architecture, les Fortifications, la Marine, la Muſique, la Perſpective, la Dioptrique, la Catoptrique, les Méchaniques, pluſieurs Traitez de Phyſique, en ſont les parties. Elles ſont les Élémens de presque toutes les Sciences; & les Arts ne ſe peuvent paſſer de leur ſecours. De ſorte que puisqu'il faut reconnoitre, avec les Peres de l'Egliſe, la néceſſité d'appliquer les Jeunes-gens aux Lettres humaines, il n'y a que ceux qui ignorent les Mathématiques, qui puiſſent dire que ce ſeroit leur faire perdre le tems que de les leur faire étudier: vû que l'Hiſtoire Eccléſiaſtique donne de ſi grandes louanges aux Peres de l'Egliſe, qui ne les ont pas ignorées. Mais ceux qui en jugent ſi mal, ne le font ſans doute que par un bon zèle, parce qu'ils croyent qu'elles ne peuvent être utiles. Ainſi il eſt juſte qu'on leur faſſe voir dans la Préface de cet Ouvrage, par lequel on prétend ouvrir un Cours de Mathématiques, l'utilité qu'on peut retirer de l'étude qu'on conſeille ici.

Tout le monde reconnoit que l'on ne remporte que très peu de fruit des Colleges, & que l'on y paſſe le tems à apprendre des choſes, particulierement dans la Phi-

Philoſophie, dont il n'eſt pas même permis de faire uſage parmi les honnêtes gens; comme ſont une infinité de Queſtions de chicane. Il eſt vrai que l'on dit que ces choſes ont leur utilité, en ce qu'elles font l'eſprit, & qu'elles le rendent ſubtil, étendu, & capable de raiſonner. Mais ſi c'eſt cette ouverture & cette étendue d'eſprit, & cette diſpoſition à bien raiſonner, que l'on regarde dans les prémieres études des Jeunes-gens, comme on le doit faire; l'étude des Mathématiques devroit être plus ordinaire qu'elle ne l'eſt: quand il ne ſeroit pas vrai d'ailleurs qu'il n'y a aucune Profeſſion à laquelle elles ne ſoient utiles. Car enfin perſonne ne doute que la Philoſophie, comme on l'enſeigne, ne ſoit pleine de Queſtions douteuſes, de Sophismes, de mauvais Raiſonnemens; & qu'ainſi elle ne peut fournir que des modeles très imparfaits de clarté, de netteté & d'exactitude: ce que l'on ne peut pas dire des Mathématiques, qui n'admettent aucun principe dont la vérité ne ſoit manifeſte. Elles ne ſe contentent pas de probabilitez: elles démontrent toutes les Propoſitions dont la vérité eſt un peu cachée; ne ſe ſervant point de paroles ambiguës, ni de vaines ſubtilitez, mais de paroles claires, de raiſonnemens ſolides & exempts de toute erreur. Ainſi elles ſont

bien plus propres à exercer & à former l'eſprit, que la Philoſophie. Ceux qui ont vu pluſieurs excellens Originaux, ſavent bien mieux juger d'un Tableau. Ceux auſſi qui ſont accoutumez à des principes clairs & à des Démonſtrations exactes, jugent bien mieux de la clarté & de l'exactitude d'un raiſonnement. Dans les Mathématiques, l'on tire d'un principe connu mille choſes inconnues, par un enchainement merveilleux de pluſieurs Propoſitions : ce qui rend encore l'eſprit perçant. Et comme ſouvent on y trouve des Démonſtrations qu'on ne peut entendre qu'en enviſageant la vérité de cent autres Démonſtrations dont elles dépendent, l'étude que l'on fait de cette Science étend l'eſprit, en l'habituant à comprendre d'une ſeule vue pluſieurs choſes.

Ainſi, qu'on conſidere ſi on veut les études de la Jeuneſſe, ou comme de ſimples occupations dont il faut remplir le vuide de leurs prémieres années, afin que le vice ne s'en empare pas ; ou comme des préparations à des études plus ſérieuſes : il eſt conſtant que cette conſideration doit porter les perſonnes qui ont du zèle pour l'éducation de la Jeuneſſe, à faire qu'on enſeigne avec plus de ſoin les Mathématiques qu'on ne l'a pas fait depuis quelques ſiecles. Autrefois l'on y appliquoit d'abord les Jeunes

nes-gens. Les Philoſophes ſuppoſoient que ceux qui entroient dans leurs Ecoles, n'ignoroient pas ces Sciences: comme il paroît par cette Inſcription qui étoit ſur la porte de leurs Académies: *Que ceux qui ne ſavent pas la Géometrie, n'entrent point ici.* Platon montre très bien, que non-ſeulement elles ſont utiles pour acquérir les Sciences, mais qu'elles peuvent encore ſervir à former les mœurs. Un des grands principes de corruption de tous les hommes, eſt cette forte inclination qu'ils ont pour les choſes ſenſibles, qui fait que rien ne leur plait que ce qui flate leurs ſens; qu'ils ne recherchent & qu'ils ne s'appliquent qu'à ce qui fait ſur eux des impreſſions agréables. Ainſi, comme la Géometrie ſépare des Corps qu'elle conſidere, toutes les qualitez ſenſibles, & qu'elle ne leur laiſſe rien de ce qui peut plaire à la concupiſcence; quand on peut forcer un eſprit, & obtenir qu'il s'applique à l'étudier, on le détache des ſens, & on lui fait connoitre & aimer d'autres plaiſirs que ceux qui ſe goûtent par leur moyen: ce qui eſt de la derniere importance.

Il faut avouer néanmoins, que ceux qui ſont Mathématiciens, ne ſont pas toujours exacts dans les raiſonnemens qu'ils font ſur d'autres matieres que les Mathématiques, & qu'ils n'ont pas moins d'amour pour les

plaiſirs ſenſibles, que ceux qui ignorent ces Sciences. C'eſt pour cela qu'on n'a presque fait aucune attention à ce fruit que l'on peut retirer des Mathématiques, & qu'on ne les a regardées que comme des Sciences curieuſes, ou utiles ſeulement à ceux qui embraſſent de certaines Profeſſions; en un mot, c'eſt ce qui a fait qu'on les a négligées. Mais il ne faut pas juger de leur utilité par le peu d'uſage qu'en ont fait ceux dont nous parlons, pour n'avoir pas aſſez conſideré que la fin de toutes nos études doit être de nous former l'eſprit & le cœur; & que l'eſprit de l'homme n'eſt pas fait pour les Mathématiques, mais que les Mathématiques ſont faites pour lui. C'eſt ſans doute un défaut très conſiderable; & pour l'éviter, & tirer toute l'utilité que peut produire l'étude des Mathématiques, il faut que ceux qui enſeignent ces Sciences faſſent faire à leurs Diſciples toutes les réflexions néceſſaires. Ils doivent leur apprendre à bien diſcerner le vrai d'avec le faux; à bien appercevoir ce que c'eſt qu'un raiſonnement juſte, par la comparaiſon des choſes claires & des démonſtrations certaines qu'ils leur propoſent; leur faire remarquer cette belle Méthode que l'on ſuit dans les Mathématiques, pour réſoudre une difficulté; ce ſoin que l'on a de définir tous les termes obſcurs, afin d'éloigner

gner toutes les disputes de mots ; & cette adresse à tirer de ce qui est connu, des choses si cachées & si difficiles. Il faut qu'en même tems ils leur fassent estimer & aimer toutes ces choses, qui surprennent l'esprit, & qui lui sont agréables, quand il n'est pas rebuté par les difficultez. Enfin, pour me servir d'une expression de S. Grégoire Thaumaturge, ils doivent former dans l'esprit des Jeunes-gens comme une digue assurée contre l'erreur, les fortifiant & les accoutumant à ne donner leur consentement qu'à ce qui est évident ; & détachant leur cœur des plaisirs sensibles, leur en faisant goûter de plus purs. Il n'y a personne qui ait quelque connoissance des Mathématiques, qui n'en soit charmé. La vérité y paroît sans nuage, au-lieu que dans les autres Sciences elle y est cachée sous d'épaisses tenebres. Elles doivent plaire à notre esprit ; car il n'est pas si fort corrompu par le mensonge, qu'il ne lui reste une forte inclination pour la vérité. Il n'y a rien qu'il aime davantage, comme dit S. Augustin : *Quid fortiùs desiderat anima quàm veritatem ?*

Si les Mathématiques ne donnent pas tout le plaisir dont elles sont capables, & si elles n'attirent pas toutes les personnes studieuses, c'est que les épines dont elles

ſont environnées rebutent, parce qu'on fuit la peine & le travail. Mais ce n'eſt pas un juſte ſujet de les négliger. Prémierement ces épines, c'eſt-à-dire la difficulté qu'on y a à comprendre les véritez qu'elles propoſent, n'en eſt pas tellement inſéparable, qu'on ne puiſſe dire que ſi les Mathématiques ſont difficiles, c'eſt en partie la faute de ceux qui les ont traitées; car il ſemble que ceux qui ont écrit dans les ſiecles précédens, ne ſe ſoient mis en peine que de convaincre l'eſprit, ſans penſer à l'éclairer. Ce n'eſt pas qu'on puiſſe rendre ces Sciences auſſi aiſées que l'Hiſtoire, que la Poëſie, & que la Rhétorique, où il n'eſt beſoin pour devenir ſavant que d'avoir des yeux & des oreilles, dont les Mathématiques demandent en quelque façon qu'on ſe défaſſe & que l'on applique ſeulement ſon eſprit: ce qui eſt difficile, parce que, comme nous ſommes faits aujourd'hui, nous ſentons plus volontiers que nous ne concevons; les operations des ſens étant accompagnées de quelque plaiſir ſenſible, qui ne ſe trouve point dans les conceptions ſpirituelles. Mais cela ne doit pas éloigner de l'étude des Mathématiques: il les faut même employer pour vaincre cette délicateſſe, qui fait que l'on ne ſe donne qu'à ce qui eſt facile & peut cauſer un plaiſir ſenſible.

Car

Car comme nous devons de bonne heure endurcir notre corps au travail, & le rendre capable de ſupporter de grandes fatigues, il faut auſſi faire notre eſprit aux travaux ſpirituels, l'accoutumant à concevoir les choſes difficiles, à y donner une entiere attention, à ſuivre le fil d'un raiſonnement pour long qu'il ſoit, & à ne pas ſe rebuter de la multiplicité des choſes qu'il faut conſiderer pour appercevoir la vérité ou la fauſſeté d'une Propoſition. Ceux qui ne ſont accoutumez qu'à des études ſenſibles, comme à la Poëſie, deviennent ſi tendres & ſi délicats, qu'ils ne ſont pas capables de la moindre application. Ils ne ſavent ce que c'eſt que faire uſage de leur eſprit; & un raiſonnement de cinq à ſix lignes, un peu ſpirituel, leur caſſe la tête.

Il ne faut donc pas eſperer que l'on puiſſe traiter les Mathématiques d'une maniere agréable à ces perſonnes. On peut bien leur faire voir & toucher les figures; mais il n'y a que le pur eſprit qui apperçoive leurs proprietez: ce qui ne ſe peut faire ſans attention. Cependant, ſi on ne peut pas rendre les Mathématiques aſſez aiſées pour qu'on les apprenne en jouant, on peut diminuer le travail de cette application qu'il leur faut donner; & c'eſt à quoi l'on n'avoit pas travaillé. Je ne veux pas dire que

les Démonſtrations qu'on voit dans les Ouvrages des Anciens, manquent du côté de la vérité, puisqu'elles ſont certaines; mais elles péchent contre la netteté & la clarté, étant trop longues & trop embaraſſées. Outre cela, ce qui empêche que les Ouvrages de ces grands Hommes, qui méritent d'ailleurs tant de louanges, n'éclairent auſſi vivement l'eſprit, qu'ils le convainquent fortement; c'eſt qu'ils ſe contentent ſeulement de placer les Propoſitions qu'ils font, de ſorte que celles qu'ils employent pour une Démonſtration, ſe trouvent devant cette Démonſtration. Ils ne ſe ſont point aſſujettis à un ordre qui pût conduire le Lecteur de ce qu'il connoit à ce qu'il ne connoiſſoit pas, ſans autre travail que celui d'une attention médiocre : ce qui arrive infailliblement lorsque les Propoſitions ſont rangées naturellement, ſélon qu'elles ſe doivent ſuivre les unes les autres; qu'on ne propoſe en chaque lieu que ce qui appartient à la matiere qui s'y traite; & qu'enfin on cherche les voyes les plus courtes, car on ſe laſſe dans les plus beaux chemins quand ils ſont trop longs : outre qu'un Ouvrage n'eſt pas propre à former l'eſprit, lorſqu'il n'y a point d'ordre, qui eſt ce qu'on cherche, & ce qu'on doit trouver dans les Mathématiques.

ques. S. Auguſtin nous donne une règle qui nous empêcheroit de tomber dans l'erreur auſſi ſouvent que nous le faiſons, ſi nous la ſuivions. Prenez garde, dit-il, de croire ſavoir une choſe, ſi vous ne la connoiſſez auſſi clairement que vous ſavez que ces nombres, un, deux, trois, quatre, ajoutez dans une ſomme, font dix. Un Ouvrage de Mathématique doit donc être ſi exact, & pour la clarté, & pour l'ordre, qu'il ſerve de modele pour celui que l'on doit ſuivre dans toutes les Sciences; de ſorte que l'eſprit s'accoutume dans cette étude à s'appliquer aux choſes qu'il doit examiner, à diſcerner la vérité & à la déduire des principes dont elle dépend, d'une maniere ſuivie. C'eſt une choſe d'un prix infini, & le fruit le plus précieux que nous puiſſions recueillir de nos prémieres études.

Toutes ces conſiderations ſur l'utilité que la Jeuneſſe peut retirer de l'étude des Mathématiques, m'ont porté à travailler à cet Ouvrage, que j'ai tâché de rendre facile, afin qu'il pût donner une entrée dans ces Sciences, & qu'il fût propre à former l'eſprit; ce qui a été mon principal deſſein. Pour ce qui eſt de la facilité, je ſai par expérience que pour peu qu'on s'y applique, on le peut entendre; & que les Jeunes-gens avec le ſecours d'un Maitre, n'y trouveront rien au-

deſſus de la capacité de leur eſprit. Je ne propoſe d'abord que des proprietez de la Grandeur, ſi connues, que perſonne ne les peut ignorer. Je commence par les nombres, qui ſont la choſe que l'eſprit connoit le plus clairement. Les Démonſtrations ſont courtes; & c'eſt à quoi j'ai travaillé, parce que je ſai que l'eſprit des Jeunes-gens ne peut pas demeurer longtems attentif; & par conſéquent, qu'il ne peut concevoir les Démonſtrations les plus claires, lorſqu'elles ſont un peu longues. C'eſt auſſi ce qui m'a fait rechercher celles qui ſont générales, qui étant une fois conçues répandent une grande lumiere dans ce qui ſuit; de ſorte qu'en un mot & ſans obſcurité on peut propoſer & prouver pluſieurs véritez importantes; ce qui abrege beaucoup. Dans chaque Livre, il n'y a que deux ou trois Démonſtrations qui puiſſent arrêter: toutes les autres en ſont des conſéquences qui ſautent aux yeux.

Ce Traité a pour objet la Grandeur en général. *Grandeur* eſt tout ce que l'on conçoit capable du plus ou du moins, c'eſt-à-dire, tout ce qui peut être augmenté par quelque addition, ou qui peut être diminué par quelque retranchement. Ainſi, non-ſeulement l'on renferme ſous le nom de Grandeur, la longueur, la largeur, & la pro-

profondeur des Corps ; mais encore le tems, la peſanteur, la vîteſſe, le mouvément, les ſons, les autres qualitez dans leſquelles on peut diſtinguer pluſieurs degrez, & généralement toutes les choſes finies, capables du plus ou du moins. Par conſéquent ſous ce nom de Grandeur, on comprend même les ſpirituelles qui ſont finies, puiſqu'on peut conſiderer dans leurs perfections des degrez differens : qu'on les peut concevoir plus ou moins parfaites en elles-mêmes, ou par rapport à d'autres. L'objet des Mathématiques en général eſt la Grandeur, priſe de la maniere que nous venons de le dire. On en explique les parties dans les Traitez particuliers ; c'eſt pourquoi il eſt aſſez évident que c'eſt par un Traité de la Grandeur en général, que l'on doit ouvrir le cours des Etudes des Mathématiques, & que ce Traité doit être conſideré comme les Elémens de cette Science. *J'ai cru* que l'Ouvrage d'Euclide, qu'on appelle les Elémens de Géometrie, n'étoit point ſi propre à donner cette entrée : car outre qu'il n'y traite que d'une eſpece particuliere de la Grandeur, qui ſont les Corps, dont les proprietez ſont plus compoſées & plus difficiles à connoitre que celles de la Grandeur en général ; comme il n'y parle que de la meſure des Corps, ſon Ouvrage n'eſt pas ſi propre pour former l'eſprit que celui que je pro-

propoſe. Il eſt vrai que les Corps que l'on conſidere dans la Géometrie n'ont ni couleur, ni ſaveur, ni aucune autre qualité ſenſible qui puiſſe flater les ſens; mais enfin ils forment des images, & il arrive tous les jours, que ceux qui ſont accoutumez aux Démonſtrations où l'on fait conſiderer quelque figure, ne ſont pas capables de concevoir un raiſonnement s'il n'eſt exprimé par des lignes; & qu'ils ne prennent pour de véritables Démonſtrations, que celles que l'on peut rendre ainſi ſenſibles par des figures. L'imagination, auſſi-bien que nos ſens, eſt une grande ſource d'erreurs. Ceux qui n'ont jamais fait uſage de leur eſprit pur, & qui ſont accoutumez à ne concevoir que ce que l'imagination peut repréſenter, ſont peu diſpoſez à entrer dans la connoiſſance des choſes ſpirituelles. Auſſi ne voyons-nous que trop ſouvent, que les plus grands Géometres ne ſont pas bons Métaphyſiciens; c'eſt-à-dire qu'ils ne conçoivent pas ce qui appartient aux Etres ſpirituels, comme ſont Dieu, les Anges, & l'Ame de l'Homme. Cet inconvénient ne ſe trouve point ici. Dans tout ce Traité de la Grandeur en général, il n'eſt beſoin en aucune maniere de ſe repréſenter des Corps: il ne le faut pas même faire, puiſque ce qu'on dit de la Grandeur en général peut convenir à des choſes ſpirituelles, dans les perfections

des-

desquelles l'on peut concevoir plusieurs degrez, & qui par conséquent sont capables d'augmentation ou de diminution, & de plusieurs rapports & proportions. Ainsi l'étude de ce Traité détache davantage l'esprit des choses sensibles, que la Géometrie, & donne une plus grande disposition pour concevoir les choses spirituelles & abstraites.

Les anciens Géometres, comme nous avons dit, ne se sont point assujettis à garder un ordre naturel dans leurs Ouvrages: comme il paroît dans celui d'Euclide, qui ne semble proposer les véritez qu'il enseigne, que comme elles se sont présentées fortuitement, puisque celles qui appartiennent à des matieres differentes s'y trouvent mêlées sans distinction. Cette confusion ne se trouve point ici, tout y étant traité avec ordre & dans son lieu. L'on donne même dans le VII. Livre, les Règles de la Méthode. C'est pourquoi *j'espere* que cet Ouvrage pourra contribuer à former l'esprit de ceux qui le liront; qu'il leur servira d'un modele de clarté par la certitude des Démonstrations qu'il contient, & de netteté par l'ordre qui y est gardé. L'on ne peut aussi rien concevoir de plus propre pour rendre l'esprit étendu; car comme cet Ouvrage traite de la Grandeur en général, sous laquelle tous les Etres finis sont compris, il donne de vastes connoissances.

La

La maniere de démontrer que l'on employe eſt très féconde, comme on le reconnoitra: elle ouvre des moyens pour trouver une infinité de Démonſtrations. Je deſire que les Jeunes-gens prennent dans la lecture de cet Ouvrage, l'habitude de concevoir & d'aimer les véritez qui ſont au-deſſus des ſens. Il y a des Problêmes curieux: s'ils y prennent plaiſir, ils reconnoitront que l'on peut trouver du divertiſſement ailleurs que dans les choſes matérielles & ſenſibles. C'eſt une réflexion que les Maitres leur doivent faire faire. Ils auront occaſion de leur inſinuer pluſieurs autres véritez très importantes; car en leur faiſant remarquer l'étendue de l'eſprit humain, qui paroît dans cette Science plus que dans aucune autre; & leur montrant que ce ne ſont point les ſens ni l'imagination qui nous ont fait découvrir tant de véritez; ils les convaincront qu'il n'y a point d'homme raiſonnable, qui puiſſe penſer qu'une Ame matérielle ſoit capable de tant de connoiſſances ſi certaines, ſi abſtraites & ſéparées de toute matiere; comme ſont particulierement celles que donne le ſixieme Livre, où l'on traite des Grandeurs incommenſurables dont la valeur ne peut être exprimée par aucun nombre, & de qui cependant l'eſprit découvre pluſieurs proprietez, perçant avec une ſubtilité merveilleuſe au travers des tenebres qui

qui les cachent. Autrefois le Philoſophe Ariſtippe ayant apperçu ſur le rivage de l'Ile de Rhodes où la tempête l'avoit jetté, des figures de Géometrie; Je vois, s'écria-t-il, qu'il y a des hommes dans ce lieu. *Veſtigia hominum agnoſco.* En liſant un Traité de la Grandeur en général, & en conſiderant les Démonſtrations étendues & fécondes qu'on y trouve, les véritez cachées qui y ſont expliquées; on a ſujet de s'écrier, que l'Eſprit de l'homme qui a trouvé toutes ces choſes, qui les conçoit & qui les explique, eſt bien élevé au-deſſus de la Matiere, & de la condition des Brutes: réflexion utile pour connoitre la dignité de l'Ame, & pour ſe convaincre qu'elle eſt faite pour quelque choſe de grand. Mais ſi ce Traité fait voir l'étendue de l'Eſprit, il fait auſſi connoitre ſes bornes; car il y des Démonſtrations claires & convaincantes qu'une Grandeur finie eſt diviſible juſqu'à l'infini. Cette infinité eſt incompréhenſible: cependant on en fait connoitre les proprietez, les rapports: ce qui démontre qu'il y a des véritez qui ſont également certaines & incompréhenſibles; & que par conſéquent, les véritez que la Religion nous enſeigne ne doivent pas être ſuſpectes, parce qu'on ne les comprend pas entierement. Ceux qui enſeigneront cet Ouvrage, pourront trouver oc-

occaſion de faire pluſieurs ſemblables réflexions, qui non-ſeulement ſeront utiles pour donner de grandes ouvertures dans les Sciences, mais encore pour redreſſer l'eſprit & le cœur de leurs Diſciples, qui eſt le principal but que doivent ſe propoſer les Maitres.

C'eſt pour la troiſieme fois que je retouche cet Ouvrage. Il n'eſt point néceſſaire que je marque en détail ce que cette derniere Edition peut avoir de particulier: il n'y a qu'à la comparer avec les précédentes. J'ai tâché de profiter des Livres qui ont paru depuis la ſeconde Edition; des Ecrits de pluſieurs Profeſſeurs habiles qui enſeignent actuellement dans Paris, & dont on ne peut ignorer ni le nom ni le mérite. Sur les avis qu'on m'a donnez, j'ai expliqué ce qui ne l'étoit pas aſſez. J'ai corrigé ce qui étoit défectueux. J'ai abregé, j'ai retranché ce qui étoit moins néceſſaire. J'ai ajouté bien des choſes en differens endroits; & j'ai augmenté tout l'Ouvrage d'un huitieme Livre. Je ne prétens pas pour cela qu'il ſoit parfait. Ce ſont des Elémens pour ceux qui commencent. Celui qui après les avoir lus, concevra le deſir d'en ſavoir davantage, ſera capable d'entendre & de lire des Ouvrages plus ſavans.

AVIS

AVIS

SUR CETTE NOUVELLE EDITION.

ON convient de l'utilité de l'étude des Mathématiques, & qu'il ſeroit avantageux aux Jeunes-gens d'y paſſer quelque tems. On convient auſſi, & il faut l'avouer, qu'il y a d'autres études par rapport aux Emplois de la vie, encore plus preſſantes, pour leſquelles on eſt obligé de ménager la capacité de leur eſprit; & qui ne laiſſent pas le loiſir de lire de gros volumes, quoique clairs autant qu'on le puiſſe ſouhaiter. Mais ces Elémens, auſſi-bien que ceux de Géometrie, ſont ſi courts, qu'un Jeune-homme peut fort aiſément les lire avec attention, & s'y appliquer avec fruit, ſans qu'il ſoit obligé pour cela de négliger ſes autres études. Ils ouvrent une entrée facile dans toutes les Mathématiques, à ceux qui veulent approfondir ces Sciences; & ils ſuffiſent à ceux qui n'en veulent avoir qu'une connoiſſance générale, & ſeulement pour acquérir cette force d'eſprit ou cette habitude à raiſonner juſte, qu'on ne prend jamais bien ailleurs que chez les Mathématiciens. C'eſt ce qui a porté l'Auteur à les revoir avec tout le ſoin poſſible, toutes les fois qu'il

qu'il a été queſtion de les réimprimer. La derniere Edition s'en fit en 1704, *beaucoup meilleure ſans contredit & plus exacte que toutes les précédentes. Depuis ce tems-là, l'Auteur a encore reçu de nouveaux avis, & lui-même a fait de nouvelles remarques, qu'on ne trouvera que dans celle qu'on donne préſentement au Public. L'expérience a fait connoitre les endroits qui pourroient arrêter les Jeunes-gens, ou leur faire de la peine. On a donc retouché ces endroits-là: on les a éclaircis, & tout enſemble ce qui pourroit paroître obſcur. Selon qu'il a été à propos, on s'eſt étendu ou reſſerré: de ſorte qu'avec un peu d'attention, il n'y aura plus rien de difficile. On a fait divers changemens, beaucoup d'additions qu'on trouvera répandues dans tout l'Ouvrage. Si on a retranché, ce n'eſt que bien peu, encore étoit-ce des choſes aſſez inutiles & qui ne faiſoient rien qu'embaraſſer. Ainſi on voit que cette Edition eſt infiniment préférable à toutes les autres qui ont paru juſques ici, ſoit en France, ſoit dans les Païs étrangers. Ce ſera vraiſemblablement la derniere; & quand ce Livre ſe réimprimeroit, même du vivant de l'Auteur, on le verroit paroître en même état qu'il eſt préſentement, ſans qu'il y fût rien changé en aucune maniere. Après tout ce qu'on a fait, on n'a pas deſſein d'y toucher da-*

davantage. Sur-tout on s'eſt appliqué avec un ſoin tout particulier à bien corriger les fautes d'impreſſion qui ſe gliſſent ſi facilement dans les Ouvrages de la nature de celui-ci. On ſait la peine qu'elles font aux Commençans. Souvent un chiffre, une ſeule lettre, un ſimple ſigne d'Algebre, mis à la place d'un autre, les empêche d'entendre toute une Démonſtration. Cette Démonſtration ſert quelquefois de preuve & de fondement à pluſieurs autres Propoſitions qu'on rencontre dans la ſuite, & qui par-là deviennent douteuſes & incertaines, puiſqu'elles dépendent d'une Propoſition qu'ils n'ont pu comprendre. Il n'y a jamais eu de Livres ſans faute; mais ſurtout la plupart des Livres de Mathématiques en ſont pleins. Dans toute autre matiere, ces fautes d'impreſſion ſont moins que rien; chacun y ſupplée aiſément de ſoi-même: mais dans les Ouvrages de Mathématiques, elles ſont d'une extrême conſéquence, & il n'y a gueres que les Maitres qui ſoient capables de les corriger. On a donc tâché d'éviter ce défaut, en rendant cette Edition la plus correcte & la plus exacte qu'il a été poſſible. Pour cela on n'a rien épargné; on y a employé du tems, & il en a couté de la peine. Si après tous ces ſoins, il ſe trouve encore quelques fautes échapées par mégarde, on prie le Lecteur de vouloir bien les pardonner;

il le doit faire d'autant plus volontiers, qu'on a fait tout ce qu'on a pu pour n'y en laiſſer aucune. C'eſt particulierement pour les jeunes-gens qu'on a d'abord compoſé cet Ouvrage, & c'eſt encore pour eux qu'on y a mis la derniere main. S'ils veulent bien ſe donner la peine de le lire, & qu'ils en profitent, on ſe tiendra trop recompenſé de toutes les peines qu'on a eu avant que de le mettre en l'état qu'il eſt, & tel qu'on le donne aujourd'hui.

TABLE
DES SECTIONS ET CHAPITRES.

LIVRE PREMIER.

SECTION I. *LA ſcience de la Grandeur en général doit être regardée comme les Elémens de toutes les Mathématiques.*

CHAP. I. *Quel eſt le ſujet de ce Traité de la Grandeur en général.* Page 1

CHAP. II. *Ce que c'eſt que la Grandeur. Elle eſt ſucceſſive ou permanente, continue ou diſcrete. Les nombres ſe peuvent appliquer à toute eſpece de Grandeur.* 4

CHAP. III. *Des ſignes ou notes avec leſquelles on peut exprimer les nombres, & toute Grandeur. Explication des autres Notes dont on ſe ſervira.* 6

CHAP. IV. *Des principes ou véritez connues dont on peut tirer la connoiſſance des proprietez de la Grandeur.* 12

CHAP. V. *De la maniere de raiſonner en Mathématique. Ce que c'eſt que* Démonſtration. 15

CHAP. VI. *Des proprietez de la Grandeur, qui ſont les plus ſimples & les plus faciles à connoître.* 19

SECT. II. *Des quatre opérations de l'Arithmetique, Ajouter, Souſtraire, Multiplier & Diviſer, ſur des Grandeurs marquées avec des chiffres.*

TABLE

CHAP. I. *Premiere opération, Addition.* 25
CHAP. II. *Seconde opération, Soustraction.* 32
CHAP. III. *Opération troisieme, Multiplication.* 40
CHAP. IV. *Quatrieme opération, Division.* 45
SECT. III. *Des quatre opérations de l'Arithmetique, Ajouter, Soustraire, Multiplier, & Diviser, sur des Grandeurs marquées avec les lettres de l'Alphabet.*
CHAP. I. *L'Arithmetique avec des lettres, est ce qu'on appelle l'Algebre. Elle s'applique aux Grandeurs positives & négatives. Ce que c'est que ces Grandeurs.* 63
CHAP. II. *Moyen de faire les quatre premieres opérations de l'Arithmetique sur les Grandeurs qu'on marque avec une seule lettre; qu'on appelle pour cette raison, Grandeurs* incomplexes *ou* simples. 70
De l'Addition. ibid.
De la Soustraction. 71
De la Multiplication. 73
De la Division. 74
CHAP. III. *Opérations de l'Arithmetique sur les Grandeurs complexes ou composées.* 76
De l'Addition. ibid.
De la Soustraction. 78
De la Multiplication. 82
De la Division. 86

LIVRE SECOND.

SECTION I. *DEs differentes Puissances auxquelles on peut élever une Gran-*

Grandeur, selon qu'on l'augmente par l'Addition, ou par la Multiplication.

CHAP. I. *Ce que c'est que Puissance d'une Grandeur.* 89

CHAP. II. *Explication ou définition des termes dont on se doit servir, & des differentes Puissances auxquelles une Grandeur peut être élevée.* 91

CHAP. III. *Maniere ancienne d'exprimer les Puissances. La nouvelle maniere est plus nette & plus aisée.* 98

CHAP. IV. *De quelques autres especes de Grandeurs que les differentes manieres d'ajouter & de multiplier produisent.* 101

SECT. II. *De la composition & de la nature des Puissances.*

CHAP. I. *Axiomes ou demandes touchant la composition & la nature des Puissances.* 103

CHAP. II. *Propositions touchant la composition des Puissances.* 106

SECT. III. *De la Résolution des Puissances, ou de l'Extraction de leurs Racines.*

CHAP. I. *Ce que c'est que Résolution d'une Puissance, ou Extraction de sa Racine. Ce que c'est que Racine.* 110

CHAP. II. *De l'Extraction des Racines quarrées.* 113

CHAP. III. *De l'Extraction des Racines cubes.* 125

CHAP. IV. *De l'Extraction des Racines des autres Puissances.* 134

TABLE

CHAP. I. *Premiere opération, Addition.* 25
CHAP. II. *Seconde opération, Souſtraction.* 32
CHAP. III. *Opération troiſieme, Multiplication.* 40
CHAP. IV. *Quatrieme opération, Diviſion.* 45
SECT. III. *Des quatre opérations de l'Arithmetique, Ajouter, Souſtraire, Multiplier, & Diviſer, ſur des Grandeurs marquées avec les lettres de l'Alphabet.*
CHAP. I. *L'Arithmetique avec des lettres, eſt ce qu'on appelle l'Algebre. Elle s'applique aux Grandeurs poſitives & négatives. Ce que c'eſt que ces Grandeurs.* 63
CHAP. II. *Moyen de faire les quatre premieres opérations de l'Arithmetique ſur les Grandeurs qu'on marque avec une ſeule lettre; qu'on appelle pour cette raiſon, Grandeurs* incomplexes *ou* ſimples. 70
De l'Addition. ibid.
De la Souſtraction. 71
De la Multiplication. 73
De la Diviſion. 74
CHAP. III. *Opérations de l'Arithmetique ſur les Grandeurs complexes ou compoſées.* 76
De l'Addition. ibid.
De la Souſtraction. 78
De la Multiplication. 82
De la Diviſion. 86

LIVRE SECOND.

SECTION I. *DEs differentes Puiſſances auxquelles on peut élever une Gran-*

Grandeur, selon qu'on l'augmente par l'Addition, ou par la Multiplication.

CHAP. I. *Ce que c'est que Puissance d'une Grandeur.* 89

CHAP. II. *Explication ou définition des termes dont on se doit servir, & des differentes Puissances auxquelles une Grandeur peut être élevée.* 91

CHAP. III. *Maniere ancienne d'exprimer les Puissances. La nouvelle maniere est plus nette & plus aisée.* 98

CHAP. IV. *De quelques autres espeçes de Grandeurs que les differentes manieres d'ajouter & de multiplier produisent.* 101

SECT. II. *De la composition & de la nature des Puissances.*

CHAP. I. *Axiomes ou demandes touchant la composition & la nature des Puissances.* 103

CHAP. II. *Propositions touchant la composition des Puissances.* 106

SECT. III. *De la Résolution des Puissances, ou de l'Extraction de leurs Racines.*

CHAP. I. *Ce que c'est que Résolution d'une Puissance, ou Extraction de sa Racine. Ce que c'est que Racine.* 110

CHAP. II. *De l'Extraction des Racines quarrées.* 113

CHAP. III. *De l'Extraction des Racines cubes.* 125

CHAP. IV. *De l'Extraction des Racines des autres Puissances.* 134

TABLE

LIVRE TROISIEME.

Des Raiſons ou Rapports que les Grandeurs ont entre elles.

SECTION I. *DEs Raiſons ou Rapports en général.*

CHAP. I. *On donne une idée de ce que c'eſt que Raiſon & Proportion.* 138

CHAP. II. *Définition & Explication des termes dont on ſe doit ſervir.* 143

SECT. II. *De la Proportion & Progreſſion Arithmetique.*

CHAP. I. *Méthode pour connoitre les proprietez de la Proportion & Progreſſion Arithmetique.* 147

CHAP. II. *Propoſitions touchant les proprietez des Proportions & Progreſſions Arithmetiques.* 150

SECT. III. *Des Raiſons, & des Proportions & Progreſſions Géometriques.*

CHAP. I. *On éclaircit la notion des Raiſons.* 167

CHAP. II. *Explication des termes dont on ſe doit ſervir.* 170

CHAP. III. *Explication de quelques termes moins utiles.* 174

CHAP. IV. *Des Proprietez des Raiſons & des Proportions Géometriques.* 177

CHAP. V. *Uſages des Proportions dans les Régles de Trois, de Compagnie, & d'une Fauſſe poſition.* 193

CHAP. VI. *Des Progreſſions Géometriques.* 201

DES CHAPITRES.

LIVRE QUATRIÈME.

Des Raiſons compoſées que les Puiſſances & toutes les Grandeurs de pluſieurs dimenſions peuvent avoir entre elles.

SECTION I. *DEs Raiſons compoſées, & de leurs proprietez.*

CHAP. I. *On peut nombrer les Raiſons, & faire ſur elles toutes les opérations de l'Arithmetique, auſſi-bien que ſur les nombres.* 215

CHAP. II. *Ce que c'eſt que Raiſon compoſée. Définitions & Axiomes touchant les Raiſons compoſées.* 220

CHAP. III. *Théorêmes & Problêmes touchant les Raiſons compoſées.* 222

CHAP. IV. *Des Règles de Trois & de Compagnie compoſées.* 227

SECT. II. *Des Raiſons qu'ont entre elles les Puiſſances & les Grandeurs de pluſieurs dimenſions.* 231

LIVRE CINQUIEME.

Des Fractions, & des Opérations Arithmetiques ſur les Fractions & ſur les Raiſons.

SECTION I. *PRéparations pour faire les opérations de l'Arithmetique ſur les Fractions & ſur les Raiſons.*

CHAP. I. *Les Fractions ſont des manieres d'exprimer une Raiſon ; ainſi les Fractions ſont des Raiſons.* 246

TABLE

CHAP. II. *Définitions & explications des termes. Axiomes ou Propositions évidentes touchant les Fractions.* 249

CHAP. III. *Préparations néceſſaires pour faire les opérations de l'Arithmetique ſur les Fractions & Raiſons.* 253

SECT. II. *Opérations Arithmetiques ſur les Fractions & ſur les Raiſons.* 269.

CHAP. I. *De l'Addition, Souſtraction, Multiplication, & Diviſion des Fractions & des Raiſons.* 270

CHAP. II. *Des autres Opérations Arithmetiques ſur les Fractions. Problêmes curieux.* 275

SECT. III. *Des differentes eſpeces de nombres rompus,*

CHAP. I. *Des Fractions Décimales.* 282.

CHAP. II. *De la Réduction des Meſures & des Monnoyes,* 288

CHAP. III. *De l'approximation des Racines des Puiſſances imparfaites, ou de l'expreſſion* (à peu près) *en nombres rompus, de ce qu'on ne peut pas exprimer avec des nombres entiers.* 292.

LIVRE SIXIEME.

Des Grandeurs incommenſurables.

SECTION I. *CE que c'eſt que la commenſurabilité & incommenſurabilité des Grandeurs. Des nombres pairs, impairs, premiers, quarrez, cubes, &c.*

CHAP. I. *Ce que c'eſt que Grandeur incommenſurable.* 298

CHAP.

DES CHAPITRES.

CHAP. II. *Préparations pour connoître ſi les Grandeurs ſont commenſurables ou incommenſurables.* 302
SECT. II. *Règles pour connoître ſi des Grandeurs propoſées ſont commenſurables ou incommenſurables.* 311
SECT. III. *Des Opérations de l'Arithmetique ſur les Grandeurs incommenſurables.*
CHAP. I. *On peut faire toutes les Opérations de l'Arithmetique ſur les Grandeurs incommenſurables. Préparations pour cela.* 322
CHAP. II. *Les quatre Opérations de l'Arithmetique ſur les Racines ſourdes.* 329
CHAP. III. *Des Binomes & Multinomes.* 335

LIVRE SEPTIEME.

De la méthode de réſoudre une Queſtion ou Problême.

CHAP. I. *IL y a deux differentes méthodes de réſoudre une Queſtion ou Problême, qui ſont,* la Synthese & l'Analyſe. *Dans celle-ci on ſuppoſe les choſes telles qu'elles doivent être, ſelon que la queſtion eſt propoſée. Comment cela ſe peut faire.* 339
CHAP. II. *L'Analyſe ſuppoſe les choſes faites comme on les propoſe dans une Queſtion, & par le moyen de ce qu'on y connoit, elle égale les grandeurs inconnues à celles qui ſont connues, ce qui s'appelle trouver des Equations. Règles pour cela.* 343

CHAP.

CHAP. III. *De la réduction d'une Equation à une telle expreſſion, que la Grandeur inconnue qu'on cherche, ſe trouve ſeule dans un des Membres de l'Equation.* 353

CHAP. IV. *Principes des Equations, ou moyens de trouver de doubles expreſſions qui facilitent la réſolution d'un Problême.* 361

CHAP. V. *Application des précédentes règles de l'Analyſe à des Problêmes particuliers. Comment on réſout ces Problêmes ſelon la méthode ancienne par des Règles de deux fauſſes poſitions; où il eſt auſſi parlé de la Règle d'Alliage. Quelles ſont ces Règles.* 364

CHAP. VI. *Réſolution de pluſieurs Problêmes.* 374

CHAP. VII. *De la nature des Equations, de leurs differens degrez, & des préparations néceſſaires pour les réſoudre.* 399

CHAP. VIII. *De la réſolution des Equations compoſées, ou moyen de réſoudre les Problêmes du ſecond, du troiſieme & du quatrieme degré.* 413

LIVRE HUITIEME.

Supplément des Elémens des Mathématiques.

TRAITÉ *DE la Progreſſion des nombres naturels & des nombres impairs. Les fondemens de l'Arithmetique des Infinis.* 433

CHAP.

DES CHAPITRES.

CHAP. I. *Proprietez de la Progreſſion des nombres naturels.* 428
CHAP. II. *Proprietez de la Progreſſion des nombres impairs.* 435
CHAP. III. *Fondement de l'Arithmetique des Infinis.* 438

TRAITE' *DEs Progreſſions Arithmetiques & Géometriques jointes enſemble. De la compoſition & de l'uſage des Logarithmes.*

CHAP. I. *Proprietez du Triangle Arithmetique, qui comprend celles des Progreſſions Arithmetiques & Géometriques.* 445
CHAP. II. *L'union de la Progreſſion naturelle des nombres avec une Progreſſion Géometrique, ſe nomme Logarithmes.* 449
CHAP. III. *De la compoſition des Tables des Logarithmes.* 451
CHAP. IV. *De l'uſage des Tables des Logarithmes.* 456

TRAITE' *DE la Proportion Harmonique.*

CHAP. I. *Ce que c'eſt que Proportion Harmonique.* 462
CHAP. II. *Proprietez de la Proportion Harmonique.* 465

TRAITE' *DEs Combinaiſons & des Changemens d'ordre.*

CHAP. I. *Ce que c'eſt que Combinaiſon. Comment on trouve les Combinaiſons poſſibles de deux & de pluſieurs choſes.* 472
CHAP. II. *Les Combinaiſons ſe font differemment, ſelon la fin pour laquelle on les fait.* 477

CHAP.

TABLE DES CHAPITRES.

CHAP. III. *Des Changemens d'ordre.* 483
CHAP. IV. *Moyens de trouver une Combinaiſon dont le rang eſt donné dans une ſuite de pluſieurs Combinaiſons ; ou la Combinaiſon étant donnée, trouver ſon rang. Application de ces moyens à la Période Julienne.* 488

FIN DE LA TABLE.

ERRATA.

Page 144. Effacez le 9 qui eſt à la marge.
P. 343. l. 1. du Titre du Chapitre : *impoſe :* Liſez *juppoſe.*

ELE-

ELEMENS DES MATHEMATIQUES, OU TRAITÉ DE LA GRANDEUR EN GENERAL.

LIVRE PREMIER.

PREMIERE SECTION.

La ſcience de la Grandeur en général doit être regardée comme les Elémens de toutes les Mathématiques.

CHAPITRE PREMIER.

Quel eſt le ſujet de ce Traité de la Grandeur en général.

MA principale vue dans cet Ouvrage eſt d'ouvrir l'eſprit, & de le rendre capable des Sciences. Je traite donc ces Elémens de Mathématiques de maniere, qu'ils ſervent de modele pour toute autre étude : car on pourra regarder ce qu'ils contiennent comme des exemples, qui rendent ſenſibles les règles qu'il faut ſuivre dans la recherche de la Vérité. Pour cela, ceux qui liront mon Ouvrage, doivent ſe mettre en ma place ; ne conſiderant pas qu'ils ont un Livre entre les

mains, mais se regardant comme Auteurs, & comme ayant à trouver ce que ce Livre propose d'enseigner. Je ne leur servirai que de guide; je ne fais point le personnage de Maitre, je prépare l'esprit de celui qui lit mes Ecrits de maniere, que de lui-même il peut, avec une médiocre attention, découvrir la vérité des principes que j'expose, & appercevoir les conséquences qui en sont les suites naturelles.

Je me comporterai donc ici comme si je ne savois pas moi-même ce que c'est que les Mathématiques, si ce n'est que selon qu'on parle de ce que les Mathématiciens peuvent faire, j'apperçois que l'objet général de toutes les Mathématiques, c'est tout ce qui est Grand, ou la Grandeur considerée en général. Grandeur, c'est tout ce qui peut être augmenté ou être diminué: ce qui a des parties. Les Mathématiciens considerent les corps, ils font des figures, ils mesurent la Terre, le mouvement des Cieux; ils font des machines, ils sont Architectes. En toutes ces choses, la Grandeur est leur objet. Ce nom comprend toutes les choses matérielles & presque toutes les spirituelles, non seulement les Corps, mais encore les Esprits. Car les Anges peuvent faire une compagnie qui peut être augmentée ou diminuée. On conçoit qu'on y peut ajouter d'autres Anges, ou les en retrancher. Chaque Ange fait partie de cette compagnie.

Ce mot de *Grandeur* ne convient donc pas seulement aux corps qui sont étendus en longueur, largeur & profondeur; mais encore au Tems, au Mouvement, aux Sons. Le Tems

a des

a des parties : il peut être augmenté ou diminué. Il eſt compoſé d'années, de mois, de ſemaines, de jours, d'heures, de minutes, &c. Le Mouvement a auſſi des parties ou degrez, ſelon leſquels il s'augmente ou ſe diminue. Un corps ſe meut ou plus vîte ou plus lentement qu'un autre, deux fois, trois fois, &c. Les oreilles apperçoivent des degrez dans les Sons : un Son eſt plus fort ou plus foible, il s'augmente ou il ſe diminue. Généralement, tout ce qui a des degrez eſt renfermé dans l'idée de la Grandeur : ainſi les qualitez, les perfections, qui ont des degrez ſelon leſquels elles s'augmentent ou elles ſe diminuent, ſont des Grandeurs. De ſorte que la ſcience de la Grandeur eſt une ſcience univerſelle, qui s'étend preſque à toutes choſes. Au moins elle comprend en général toutes les Mathématiques ; c'eſt pourquoi on lui y a donné le nom de *Mathématique Univerſelle*, & *de Clef des Mathématiques*. Certainement cette ſcience en eſt les élémens, c'eſt à dire l'entrée : elle en découvre les premiers principes : elle contient ce qu'il faut ſavoir avant toute autre choſe, & ce qui étant bien connu donne une merveilleuſe facilité pour en apprendre toutes les parties. Ce mot *Elément* pris pour les principes d'une Science, ce qui en donne une connoiſſance générale en eſt les Elémens. S'il n'y a donc aucune partie des Mathématiques qui n'ait pour objet quelque Grandeur, ſans doute que la ſcience de la Grandeur en général en doit être regardée comme les Elémens. C'eſt donc par un Traité de la Grandeur en général qu'il en faut commencer l'étude.

ſes que l'on conçoit chacune comme faiſant partie d'un même tout ; & entant que chacune s'appelle *une*, elle eſt regardée comme n'ayant point de parties. Mais ſuivant l'idée que nous avons donné du *nombre*, qui ſans contredit eſt la plus naturelle de toutes, rien n'empêche qu'on n'y puiſſe comprendre l'*unité*.

Les nombres limitent donc en quelque maniere cette proprieté, de preſque tout ce qui eſt grand, de pouvoir être diviſé à l'infini ; car un pied ſe diviſe en pluſieurs pouces, un pouce en pluſieurs lignes, une ligne en pluſieurs points, & ainſi à l'infini. Les nombres, dis-je, ſemblent borner & terminer cette diviſibilité ; car on n'appelle une grandeur *une*, que lorsqu'on la conçoit comme dans la derniere diviſion dont elle eſt capable. Néanmoins, comme on le verra dans la ſuite, on peut exprimer même par des nombres ſa diviſibilité, en diſant par exemple, *la moitié* de cette grandeur, *le quart*, *le tiers*, &c. Les nombres qui expriment ces ſubdiviſions ſe nomment *nombres rompus*, au-lieu que ceux qui expriment les premieres diviſions s'appellent *nombres entiers*. Comme les nombres conviennent à toutes ſortes de Grandeurs, la Grandeur en général n'eſt proprement qu'un Traité d'Arithmetique.

CHAPITRE III.

Des ſignes ou notes avec leſquelles on peut exprimer les Nombres, & toute Grandeur. Explication des autres notes dont on ſe ſervira.

3 POur abreger l'expreſſion d'un nombre & de toute ſorte de grandeur, on ſe ſert

ſert de *ſignes* ou *notes*. L'on appelle *chiffres* ces caracteres que l'on dit que les Arabes nous ont donné. Les voilà, avec les noms dont ils tiennent la place, ou qu'ils ſignifient. 1. *un*. 2, *deux*. 3, *trois*. 4, *quatre*. 5, *cinq*. 6, *ſix*. 7, *ſept*. 8, *huit*. 9, *neuf*.

Ces chiffres déterminent la maniere dont on conſidere une ou pluſieurs grandeurs. Ils marquent qu'on y conſidere un certain nombre de parties. Par exemple, ce caractere 3, marque que la grandeur à laquelle on l'applique a trois parties; ou qu'elle eſt compoſée de trois grandeurs, chacune plus petite qu'elle, & qui ſont égales entre elles, ou de même nature: comme trois pieds, trois pouces, trois ſols, trois livres, &c. Ainſi les chiffres ne ſont d'uſage que lorſque les grandeurs qu'il faut marquer ſont connues, & par conſéquent qu'on voit qu'elles ont tant de parties, ou qu'on y peut concevoir tant de parties. C'eſt ce qui fait qu'il eſt bon d'avoir d'autres ſignes ou notes que ces chiffres. On eſt accoutumé aux lettres de l'Alphabet, on ſe les repréſente plus facilement. Or quelques grandeurs qu'on puiſſe propoſer, on les peut marquer avec des lettres, appeller l'une *a*, l'autre *b*, l'autre *c*, &c. quoiqu'on ne ſache pas encore leur valeur; car pour appeller l'une *b* & l'autre *a*, il n'eſt pas néceſſaire qu'on ſache la quantité de parties qu'elles peuvent avoir au regard l'une de l'autre, au-lieu que je ne les puis marquer avec des chiffres & appeller l'une, par exemple 2, & l'autre 3, ſi je ne connois leur valeur au regard l'une de l'autre, que l'une eſt, par exemple, les deux tiers de l'autre. Ainſi,

les lettres ſont des notes plus générales. On s'en peut ſervir pour marquer les nombres, au-lieu qu'on ne ſe peut ſervir de nombres ou chiffres que pour marquer les grandeurs qu'on connoit.

Il ſemble que les hommes ayent d'abord commencé à compter ſur leurs doigts. L'on voit que preſque toutes les Nations, après avoir compté juſques à dix, autant que nous avons de doigts, recommencent. Les Hébreux & les Grecs, après avoir marqué les nombres juſques à dix par les dix premieres lettres de leur Alphabet, la onzieme lettre eſt marque de vingt, la ſuivante de trente & ainſi de ſuite; & pour marquer les nombres qui ſe trouvent entre dix & vingt, entre vingt & trente, &c. comme quinze, ils joignent la cinquieme letrre avec celle qui marque dix. Les Latins marquoient dix par un X, cinq par un V, l'unité par un I, deux par II, trois par III; & pour abreger ils ſe ſervoient du V & du X pour marquer de moindres quantitez, mettant devant autant de fois I que ces quantitez valent moins que V ou X: ainſi IV vaut quatre, & IX vaut neuf. Pour les grands nombres ils les marquoient par la premiere lettre de leur mot Latin. Ainſi C, par où commence ce mot *centum*, marque *cent*; & M, premiere lettre du mot *mille*, eſt la marque de *mille*. La lettre D, vaut *cinq cens*. On prétend que cette note étoit dans le commencement la moitié de cette note CIↃ, dont on ſe ſervoit pour marquer *mille*.

Je ne dis ceci qu'en paſſant, car cela ſe trouve expliqué ailleurs; & ce n'eſt que pour faire voir combien les chiffres ſont plus com-

mo-

modes. Les Arabes, de qui nous les avons reçus, ont suivi cette ancienne maniere de compter, en recommençant après qu'on est venu jusqu'à dix. Il est important de bien considerer que la valeur des chiffres ne dépend pas seulement de leur figure, mais de leur disposition. Lorsque plusieurs chiffres sont rangez de suite dans une même ligne, ceux qui sont dans la premiere place, commençant à compter de droite à gauche, ne valent jamais plus qu'eux-mêmes. Ceux qui sont dans la seconde place, valent dix fois davantage que dans la premiere : 1, par exemple, dans la premiere ne vaut qu'une seule unité; dans la seconde, il vaut une dixaine; dans la troisieme, dix fois davantage, savoir dix dixaines, ou une centaine; dans la quatrieme, dix centaines, ou un mille; dans la cinquieme, dix fois mille, ou dixaines de mille; dans la sixieme, dix dixaines de mille, c'est-à-dire cent mille; dans la septieme, une dixaine de centaines de mille, ou million; dans la huitieme, une dixaine de millions; dans la neuvieme, une centaine de millions; dans la dixieme, un milliard, ou billion; dans la onzieme, une dixaine de milliards; dans la douzieme, une centaine de milliards; ainsi de suite : en sorte que la valeur d'un chiffre est dix fois plus grande dans le rang suivant, que dans le précédent.

Pour augmenter ainsi la valeur de chaque chiffre, on se sert d'un ou de plusieurs *Zero*, selon que l'on veut faire valoir ce chiffre. Les zero sont faits ainsi, o; en rempliſſant les premiers rangs, ils font voir que le chiffre après lequel ils sont placez est dans un

rang plus reculé : comme si après 2 il y a deux zero, en cette sorte 200, ces deux zero feront voir que 2 est dans le troisieme rang, où il vaut deux-cens. Ainsi, quoique les zero ne signifient rien d'eux-mêmes, ils ne sont pas inutiles, puisqu'ils déterminent les rangs des chiffres, selon lesquels leur valeur augmente ou diminue par proportion décuple. Il a plu aux premiers Inventeurs de ces chiffres d'établir cette proportion, ce qui étoit purement arbitraire.

Lorsqu'il y a plusieurs chiffres sur une même ligne, pour éviter la confusion, on les coupe de trois en trois par tranches, ou seulement on laisse un petit espace vuide : &, chaque tranche, ou chaque *ternaire*, a son nom. Le premier ternaire s'appelle unitez ; le second, mille ; le troisieme, millions ; le quatrieme, milliards, ou billions ; le cinquime, trillions ; le sixieme, quatrillions. Et comme dans le premier ternaire on compte 1°. nombres ou unitez, 2°. dixaine ; 3°. centaine ; dans chaque autre ternaire, on dit de même, nombre, dixaine, centaine. Mais si c'est dans le troisieme ternaire, cela voudra dire nombre de millions, dixaine de millions, centaine de millions ; au-lieu que dans le premier ternaire, quand on dit nombre, ou dixaine, ou centaine, on n'entend parler que d'unitez : tant d'unitez, tant de dixaines d'unitez, tant de centaines d'unitez.

Considerons avec soin la disposition de ces chiffres qui est très simple, & qui fait qu'avec neuf caracteres & les zero on peut exprimer quelque nombre que ce soit, pour grand qu'il puisse être.

de

de quatrillions.			de trillions.			de billions.			de millions.			de mille.			d'unitez.		
centaine	dixaine	nombre	centaine	dixaine	nombre	centaine	dixaine	nombre	centaine	dixaine	nombre	centaine	dixaine	nombre	centaine	dixaine	nombre
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

4 &c.

Pour donner à un chiffre la valeur qu'il doit avoir, il n'y a qu'à augmenter le nombre des zero qui le précedent. Quand on passe les quatrillions, cela s'appelle quintillions, sextillions, septillions; ainsi de suite. Ce sont des mots que l'on invente, parce qu'on n'en a point d'autres.

Cette marque + signifie *plus*. $A + B$, c'est *A plus B*.

Celle-ci — signifie *moins*. $A - B$, c'est *A moins B*.

$=$ C'est la marque de l'*Egalité*. $C = D$, signifie que *C* est égal à *D*. Au-lieu de ce signe, on trouve en plusieurs Livres celui-ci ℔ pour marque de l'Egalité.

× est le signe de la Multiplication. Il signifie proprement *par*. Pour dire qu'il faut concevoir *A* multiplié par *B*, on écrit $A \times B$.

sup. ou *supra*, c'est *ci-dessus*.

L. *Livre*.

n. *nombre*. On met des nombres dans les marges de cet Ouvrage, qui servent à trou-

ver les endroits où l'on renvoye. L. 2. n. 6. c'eſt-à-dire, *Livre ſecond, nombre ſix.*

Si ce qu'on allegue eſt du même Livre, on cite le nombre précédent qui eſt à la marge avec cette note *ſup.* Ainſi *ſup.* n. 5. c'eſt à-dire, *ci-deſſus, nombre cinquieme.* Les autres notes qui ſont dans l'Ouvrage, ſont expliquées dans les lieux où l'on commence de s'en ſervir.

CHAPITRE IV.

Des Principes ou Véritez connues dont on peut tirer la connoiſſance des proprietez de la Grandeur.

4 AVant que de paſſer outre, je dois examiner ſi je puis avoir quelque lumiere qui me guide dans les recherches que je ferai, & qui me faſſe diſtinguer la Vérité, ſi je ſuis aſſez heureux pour la rencontrer, ou qui me redreſſe ſi je me trompe. Je ſuis déja convaincu par pluſieurs expériences qu'on ne ſe trompe point, lorſqu'on ne donne ſon conſentement qu'à des choſes claires; que les choſes ſont ce qu'il nous paroît clairement qu'elles ſont. Je ſai auſſi qu'il y a de certaines Véritez connues de tout le monde qui peuvent ſervir de flambeau, parce que toutes les choſes qui ont de la liaiſon avec elles & qui ſont une même choſe, doivent être également certaines.

Par exemple, je ſai qu'il ne ſe peut pas faire qu'*une choſe ſoit & qu'elle ne ſoit pas*; d'où je conclus, qu'*une grandeur eſt égale à elle-même*; & de cette vérité je conclus derechef, qu'il ne ſe peut pas faire que *le tout ne ſoit pas*

pas égal à toutes ſes parties; car le tout & toutes les parties priſes enſemble ne ſont qu'une même choſe. Voilà un nombre de Vérités ſemblables qu'on nomme Principes ou Axiomes, que je rangerai ici, & que je tâcherai de me rendre bien préſentes. Et comme il eſt important de s'accoutumer de bonne heure aux manieres de parler des Mathématiciens, & aux ſignes ou notes dont ils ſe ſervent pour rendre leur diſcours plus court & plus exact, j'exprimerai ces Axiomes avec ces notes & à leur maniere.

PRINCIPES GENERAUX,

Ou Véritez claires & connues, à qui on donne le nom d'Axiomes.

Premier Axiome.

Le Tout eſt plus grand que ſa partie.

Ainſi, ſi A & B ſont les parties de la Grandeur X, il faut que X ſoit plus grand que A & B pris ſéparément.

Second Axiome.

Le Tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble.

Si A & B ſont toutes les parties de la grandeur X, il eſt évident que $A + B$, c'eſt-à-dire A avec B, eſt égal à X; ce qui s'exprime ainſi $A + B = X$.

Troiſieme Axiome.

Les grandeurs égales à une même grandeur ſont égales entre elles.

Suppoſé que A ſoit égal à Z, & que B ſoit auſſi égal à Z, alors A & B ſont deux grandeurs égales. On exprime ainſi ce raiſonnement: Si $A = Z$, & $B = Z$, ou ſi $A = Z = B$,

donc $A=B$. Je me servirai souvent de cette expression : qu'on y fasse donc attention. On peut joindre à cet Axiome celui-ci, qui n'est pas moins évident : Si A est égal à B, toute grandeur plus grande ou plus petite que B, sera plus grande ou plus petite que A.

QUATRIEME AXIOME.

Si à des grandeurs égales on en ajoute d'égales, elles demeurent égales, ou les sommes sont égales.

Si $A=B$, ajoutant à A & à B la même grandeur X, ils demeurent égaux ; $A+X=B+X$.

CINQUIEME AXIOME.

Si de grandeurs égales on en ôte d'égales, les restes seront égaux.

Si $A=B$, donc $A-X=B-X$; c'est-à-dire que si A & B sont deux grandeurs égales, A moins X est égal à B moins X.

SIXIEME AXIOME.

Si à des grandeurs inégales on en ajoute d'égales, elles resteront inégales ; l'une plus grande, si elle étoit plus grande ; l'autre plus petite, si elle étoit plus petite.

Si X & Z sont des grandeurs inégales, & que A & B soient des grandeurs égales, $X+A$ & $Z+B$ seront inégaux, l'un plus grand ou plus petit, selon ce qu'ils étoient auparavant.

SEPTIEME AXIOME.

Si de grandeurs inégales on en ôte d'égales, les restes seront inégaux ; l'un plus grand, si la grandeur étoit plus grande, l'autre plus petit, si la grandeur étoit plus petite.

C'est-à-dire, que si X & Z sont des grandeurs inégales, & A & B des grandeurs égales, $X-A$ & $Z-B$ seront inégaux, l'un plus grand ou plus petit, selon ce que X & Z étoient auparavant.

Huitieme Axiome.

Une grandeur qui a le signe + étant jointe avec elle-même ou avec son égale qui a le signe —, est égale à rien.

C'est-à-dire, $+A-A$ n'est rien. On sait qu'un zero n'a point de valeur : on exprime donc ainsi cet Axiome : $+A-A=0$: ôtant ce qu'on a mis, il ne reste rien.

Neuvieme Axiome.

Les choses qui sont moitié, ou tiers, &c. d'une même grandeur, ou de grandeurs égales, sont égales ; inégales, si les grandeurs entieres sont inégales ; plus grandes, si les grandeurs entieres sont plus grandes ; plus petites, si les grandeurs entieres sont plus petites..

On pourroit proposer plusieurs autres semblables Axiomes, c'est-à-dire plusieurs autres Véritez qu'on ne peut ignorer, & dont on ne dispute point.

CHAPITRE V.

De la maniere de raisonner en Mathématique. Ce que c'est que Démonstration.

TOut ce qui est contraire à ces Axiomes, est faux. Il est vrai & certain, s'il a avec eux une liaison nécessaire. Ce sont ainsi des sources de lumieres, comme je l'ai expérimenté. Ce n'est pas néanmoins de ces seules véritez, qu'on peut tirer la connoissance entiere du sujet qu'on traite ; c'est de la notion claire qu'on a de ce sujet, c'est-à-dire de sa nature, ou de ce qu'on connoit qu'il est. La véritable méthode pour connoitre une chose, est de faire attention à ce qu'elle est. Savoir, c'est connoitre ce que sont les choses. 5

Tou-

Toute connoiſſance eſt une véritable ſcience, lors qu'on ne prétend ſavoir que ce que l'on voit clairement dans l'idée de la choſe qu'on étudie. C'eſt à quoi pluſieurs n'ont pas aſſez pris garde. Ainſi je reconnois ici, que pour avoir une véritable ſcience de la Grandeur, il faut conſiderer avec attention l'idée qu'on en a. Tout ce qui ſe tirera de cette idée ne ſera pas moins certain, que les conſéquences des principes que nous venons de propoſer. Comme, de l'idée qu'on a du corps de l'homme l'on conclud, ſans erreur, que notre corps pour être parfait, doit avoir une tête, des pieds, des bras, & les autres parties.

Lors qu'on a ſuppoſé que les choſes étoient faites de la maniere dont on convient, tout ce qui ſuit néceſſairement de cette ſuppoſition eſt une vérité; comme, ſi l'on convient que certaines règles ſont bonnes, ſuppoſé qu'on les ait ſuivies, on ne peut rejetter les conſéquences qui en ſont tirées. Nous verrons comme, de la ſeule diſpoſition des chiffres, telle qu'on l'a ſuppoſée, on en déduit pluſieurs conſéquences, qu'on voit clairement dans l'idée qu'on a de cette diſpoſition.

Voilà donc la méthode qu'il me faut ſuivre, pour trouver la vérité. Premierement je dois conſiderer, avec attention, l'idée des choſes que je voudrai connoitre, c'eſt-à-dire conſiderer ce qu'elles ſont, ou quelle eſt leur nature, que je dois bien définir, en marquant préciſément la notion que j'en ai. La définition d'une choſe, c'eſt une propoſition qui explique ſa nature, ou ce qu'elle eſt. Il y a des définitions de mots, c'eſt-à-dire des propoſitions qui déterminent l'idée d'un mot, &

qui

qui en ôtent la confusion. Il est nécessaire de définir les termes dont on se doit servir, car souvent ils sont équivoques; & comme c'est, pour ainsi dire, au travers des noms que nous voyons les choses dont on nous parle, si les termes sont obscurs, on ne voit les choses que confusément. Lors qu'une définition est bonne, si c'est une définition de mot, elle marque précisément ce que ce mot signifie; & si elle définit une chose, elle en doit donner une idée où l'on apperçoive ce qu'elle est; de sorte qu'en étudiant cette idée, on y découvre toutes les proprietez essentielles de cette chose.

Il y a des choses si claires & si faciles à faire, que personne ne les conteste, & qu'ainsi on accordera volontiers, comme par exemple, *Qu'un nombre peut être ajouté à un autre nombre*, ou *qu'il en peut être retranché, s'il est plus petit.* C'est ce que les Mathématiciens appellent *Demandes*; c'est-à-dire des choses qu'on accorde, parce qu'on ne peut pas les contester. Comme la Vérité nait de la Vérité, & *qu'il y a* peu de Véritez stériles, il faut faire attention à tout ce qui est inconteſtable, & que tout le monde accorde, afin de voir ce qui s'en peut déduire.

Il faut sur toutes choses avoir présens à l'esprit ces Principes généraux, ces Véritez connues dignes qu'on les croye, qu'on appelle pour cela *Axiomes*; c'est ce que ce mot Grec signifie. Elles servent comme de flambeau, & c'est par leur moyen qu'on reconnoit presque en toute occasion, si on a trouvé la vérité, ou si l'on s'est trompé. Nous avons proposé ci-dessus, ceux qui avoient

plus de rapport au ſujet que nous devons traiter. Enſuite on s'applique à réſoudre les queſtions ou propoſitions que l'on peut faire ſur le ſujet qui ſe traite. S'il s'agit de connoitre & de démontrer une vérité de ſpéculation, la propoſition s'appelle *Theorême :* c'eſt un mot Grec qui dit cela. S'il s'agit de faire quelque choſe, & de prouver qu'on a fait ce qu'on avoit propoſé de faire, cela s'appelle *Problême* ; ce mot Grec ne ſignifie que propoſition.

Pour démontrer un Theorême, il faut quelquefois faire précéder une propoſition qui ſerve à la démonſtration qu'on veut faire, qui ſoit comme une *anſe* par laquelle on peut attraper & prendre la vérité dont il s'agit. Dans toutes les Sciences, lors qu'on cherche une vérité importante, il faut examiner par quel endroit on la peut attaquer ; ce qu'il faudroit ſavoir, ce qu'il faudroit avoir démontré pour la bien connoitre, ou la faire connoitre. Or, lorsqu'on propoſe une vérité dont on ne parle que pour faire connoitre une autre vérité, la propoſition que l'on fait s'appelle *Lemme*. C'eſt un mot Grec, qui ſignifie proprement le titre ou l'argument qu'on met à la tête d'un Livre ou d'un Chapitre, qui fait connoitre de quoi on doit traiter. On ne met un Lemme là où il eſt, que pour donner une entrée dans la propoſition qui ſuit.

On nomme *Corollaire* une propoſition, qui n'étant qu'une ſuite d'une propoſition précédente, contient une vérité qui s'apperçoit auſſi-tôt qu'on a reconnu la vérité de cette propoſition précédente.

Selon ce que je viens de dire, lorsque la vérité d'une propoſition eſt évidente, je dois me-

me contenter de l'énoncer par des termes clairs; car la Vérité n'a beſoin pour preuve que d'elle-même, ſa clarté eſt ſon caractere. Si une propoſition a beſoin de preuves, je ne puis la prouver qu'en faiſant voir qu'elle eſt une ſuite, ou d'un Axiome; ou de la définition, c'eſt-à-dire de la notion claire de la choſe; ou des ſuppoſitions qu'on a faites qui ſont inconteſtables, que tout le monde accorde, & qui ont été reçues pour véritables; ou de ce qui a été démontré auparavant dans un *Lemme*, dans un *Theorême*, dans un *Problême*, dans un *Corollaire*, &c. Un raiſonnement fait avec cette exactitude, s'appelle *Démonſtration.*

CHAPITRE VI.

Des proprietez de la Grandeur, qui ſont les plus ſimples & les plus faciles à connoître.

CE que je viens de faire n'eſt que pour me diſpoſer à examiner ce que c'eſt que ſa Grandeur. Comme la méthode avec laquelle je ferai cet examen doit ſervir de modele pour toutes les autres études, je conſidererai premierement ce que moi-même je dois faire ici, qui eſt de faire une grande attention à ce que l'idée de la grandeur me préſente; car il eſt évident que dans ce que l'eſprit voit, auſſi-bien que dans ce que voyent les yeux du corps, on ne découvre ce que ſont les choſes qu'en les regardant de près, & avec ſoin. Je ne connois ce que c'eſt qu'une fleur, quelle eſt ſa figure & ſa couleur, qu'en la regardant attentivement; quelle eſt ſon odeur, qu'en la flairant; quelle eſt ſa ſaveur, qu'en 6

qu'en la goûtant. Auſſi, pour connoître ce que c'eſt que la Grandeur, il faut que je ſois attentif à ce que me préſente ſon idée. Connoître, c'eſt voir ce que ſont les choſes. Quand j'étudie la Grandeur, c'eſt pour voir ce qu'elle eſt; elle eſt ce que me repréſente ſon idée. Mais comme je ſai que mon eſprit eſt fini, qu'il s'égare, qu'il ſe trompe; je dois conſiderer les choſes peu à peu & comme par parties, afin de donner une attention entiere à tout ce que j'examinerai, n'examinant d'abord que ce qui eſt de plus ſimple.

J'ai vu que la Grandeur, c'eſt ce qui peut s'augmenter ou être diminué; d'où j'apperçois que c'eſt une proprieté de tout ce qui eſt grand, qu'on lui peut ajouter une autre grandeur, & retrancher celle-là, ou une autre qui lui eſt égale ou plus petite: ce qui convient généralement à tout ce qui eſt grand. Une compagnie d'Eſprits peut s'augmenter par addition, & ſe diminuer par un retranchement ou ſouſtraction. On peut concevoir un Ange avec un autre Ange, ce qui eſt une addition; & que d'une compagnie d'Anges on en retranche deux, trois, quatre Anges.

Multiplier une grandeur, c'eſt l'ajouter à elle-même un certain nombre de fois. Multiplier cinq par ſix, c'eſt ajoûter cinq à ſoi-même ſix fois. Ainſi c'eſt une proprieté de tout ce qui eſt grand, de pouvoir être multiplié. La diviſion n'eſt pareillement qu'un retranchement, ou ſouſtraction. Diviſer une grandeur par une autre, c'eſt retrancher celci-de la premiere autant de fois qu'elle y eſt contenue. Diviſer une compagnie de ſoixante Eſprits par vingt, c'eſt voir combien dans ſoixante.

xante il y a de fois vingt, & retrancher vingt de soixante autant qu'il y est de fois, c'est-à-dire trois.

Ces proprietez sont faciles à connoitre. L'idée de la Grandeur les présente d'abord, sans qu'on les recherche. Elles sont extrêmement simples; mais pour cela on ne doit pas en faire peu de cas: car j'ai reconnu que les principes de toutes les choses naturelles sont très simples, & que lorsqu'on a une fois le principe, on a tout.

Il est manifeste que toutes les choses matérielles sont faites par des additions, & des multiplications; que les changemens qui leur arrivent, se font par des retranchemens & des divisions. Mais il faut, avant que de passer outre, & de vouloir considerer en chaque grandeur comment elle est composée de parties ajoutées & multipliées, & comment elle se peut résoudre ou décomposer par la soustraction & par la division; il faut, dis-je, examiner auparavant, comment tout cela se peut faire, c'est-à-dire, comment on peut *ajouter*, *soustraire*, *multiplier*, & *diviser*, qui sont les quatre premieres & principales operations de toute l'Arithmetique.

Lorsque les Grandeurs sont petites, ou qu'on les peut exprimer avec un ou deux caracteres, ces quatre operations sont faciles: on voit tout d'un coup que 4 & 6 font 10; que de 10 ôtant 6 reste 4; que si on multiplie 2 par 4, cela fait 8: combien de fois 2 est en 4; qu'il y est deux fois: il n'y a rien de plus évident, & par conséquent rien de plus facile. Mais il n'en est pas de même lorsque des nombres sont grands; je n'apperçois

pas

pas tout d'un coup, comme je le faiſois dans les exemples propoſez, ce que fait 678 ajouté avec 593: ni ce que produiroient ces deux nombres, ſi on les multiplioit l'un par l'autre; ni ce qu'il reſteroit de 678, après en avoir retranché 593; ni combien de fois ce dernier nombre 593, eſt dans 678.

Voilà en quoi conſiſte tout le ſecret de *l'Arithmetique*, ou de *l'Art de nombrer*. C'eſt de faire par parties, ce qu'on ne peut pas faire tout d'un coup: & c'eſt à quoi il faut faire une attention particuliere, non ſeulement pour entendre ce que l'on traite ici; mais généralement pour toutes ſes autres études: car ce qui fait qu'on trouve de la difficulté, qu'on n'avance pas, & qu'on tombe dans l'erreur, c'eſt qu'on veut trop entreprendre. L'eſprit eſt borné. Quand il ne s'applique qu'à des choſes ſimples, il les comprend facilement; mais quand il y a pluſieurs choſes à voir, & qu'il ne les ſait pas prendre les unes après les autres, il n'en prend aucune comme il faut. Or ce qu'on fait dans l'Arithmetique, donne un exemple de la méthode qu'il faut ſuivre. Dans les quatre operations dont il eſt ici queſtion, l'on n'ajoute jamais que deux grandeurs, dont chacune ne s'exprime que par un des neuf premiers nombres. On ne multiplie à la fois que deux chiffres l'un par l'autre, dont chacun ne peut valoir plus de neuf. Il en eſt de même de la Souſtraction, & de la Diviſion, comme on le verra dans la ſuite.

Cela ſe fait par le moyen de cette diſpoſition des chiffres, de laquelle j'ai parlé; car on range les grandeurs, ou leurs ſignes qui ſont des chiffres, de maniere que les unitez ſoient

ſoient ſous les unitez, les dixaines ſous les dixaines; & enſuite on opere ſéparément ſur chaque chiffre : de ſorte que l'on ménage la capacité de l'eſprit, on ne l'accable point, & on lui fait faire les choſes les unes après les autres; ce que je repete, afin qu'on y faſſe attention, & qu'on ſuive cet exemple dans toutes les recherches d'eſprit que l'on fera jamais.

Tout ce que l'on va donc dire touchant les quatre operations dont on a parlé, eſt extrêmement facile. J'ai dit qu'on marque les grandeurs avec deux ſortes de ſignes, qui ſont les lettres & les chiffres. Je conſidererai premierement comment on opere avec les chiffres; car il n'y a rien dont les idées ſoient plus claires, que celle des nombres que les chiffres marquent. Vous verrez qu'il ne s'agira que d'exprimer ſur le papier l'addition de deux chiffres; par exemple de 6 & de 7, qui fait *treize*, qu'il eſt facile de marquer ſur le papier; car *treize*, c'eſt une dixaine & trois unitez; ainſi il faut mettre 3 dans le premier rang, qui eſt celui des unitez, & 1 dans le ſecond rang, qui eſt celui des dixaines. Il en eſt de même des autres operations, dont je vais parler. Enſuite j'examinerai comment on peut faire les mêmes operations avec les lettres de l'Alphabet, qui marquant les choſes d'une maniere fort générale, ne font pas tant d'impreſſion : elles ne déterminent pas l'eſprit, qui ne conçoit point facilement les choſes quand elles ſont abſtraites. Quand je nomme x une certaine grandeur, je la repréſente d'une maniere générale, où un eſprit qui n'eſt pas accoutumé à ces manieres abſtraites, ne conçoit rien : il ne ſe peut rien imaginer

giner qui l'arrête, qui le détermine; au-lieu que ſi je la déſigne par ce chiffre 7, auſſi-tôt, ſelon la matiere dont il s'agit, il conçoit une grandeur qui a ou 7 pieds, ou 7 pouces. Si c'eſt d'une ſomme d'argent dont on parle, il s'imagine un nombre ou de piſtoles, ou d'écus, ou de livres, &c. Les choſes particulieres & individuelles ſe conçoivent plus aiſément, parce qu'il n'y a quelles qu'on puiſſe ſentir ou imaginer. Ce n'eſt que par la pointe de l'eſprit, pour ainſi dire, qu'on atteint & qu'on conçoit les choſes générales. Comme il y a des choſes qui ne peuvent être ſenſibles, il eſt important de s'accoutumer à concevoir ce qui eſt abſtrait, c'eſt-à-dire ce qui eſt ſéparé de toute matiere. Mais auſſi, puiſqu'il faut commencer par ce qui eſt plus facile, & que ſans contredit les chiffres ſe conçoivent plus facilement que les lettres & notes d'Algebre; voyons premierement, comme l'on fait ces quatre premieres operations de l'Arithmetique ſur les Grandeurs marquées avec des chiffres.

SECTION SECONDE.

DES QUATRE OPERATIONS DE L'ARITHMETIQUE, AJOUTER, SOUSTRAIRE, MULTIPLIER, ET DIVISER

Sur des Grandeurs marquées avec des Chiffres.

CHAPITRE PREMIER.

PREMIERE OPERATION.

ADDITION.

Définition de l'Addition.

L'*Addition eſt une operation par laquelle,* 7
ayant ajouté pluſieurs nombres connus en une ſomme, on connoit la valeur de cette ſomme, qui étoit inconnue.

PROPOSITION PREMIERE.

Premier Problême.

Ajouter pluſieurs nombres donnez en une ſom- 8
me, & connoitre quelle eſt cette ſomme.

1° *Il faut diſpoſer les nombres donnez de telle ſorte, que les premiers chiffres des uns ſoient ſous les premiers chiffres des autres, les unitez ſous les unitez, les dixaines ſous les dixaines, les cen-*

taines ſous les centaines, &c. Après cela il faut ajouter ces deux ſommes par parties, commençant cette addition par le premier rang de droite à gauche, afin que la ſomme s'augmentant on rejette les chiffres dans les rangs ſuivans, où ils valent davantage.

EXEMPLE. Ces deux ſommes 432 & 245 ſont données; on veut ſavoir quelle eſt la valeur de ces deux nombres.

Je diſpoſe, comme il a été enſeigné, ces deux ſommes. Je mets ſous 2 qui vaut deux unitez, 5 qui vaut cinq unitez; ſous 3 qui vaut trois dixaines, 4 qui vaut des dixaines; & 2 qui vaut des centaines, ſous 4 qui vaut des centaines: enſuite commençant de droite à gauche, je dis, 2 & 5 ſont 7 unitez, que j'écris ſous le rang des unitez. Venant au ſecond rang je dis, 3 & 4 ſont 7 dixaines, que je mets ſous le rang des dixaines. Enfin dans le troiſieme rang je dis, 4 & 2 ſont 6 centaines, lequel chiffre je poſe ſous ce rang des centaines; ainſi j'ai 677 qui eſt la ſomme cherchée, égale aux deux qu'on avoit propoſé pour être ajoutées en une ſeule.

	432
	245
	677

2°. *Si l'addition des chiffres d'un rang fait un plus grand nombre que celui qui ſe peut mettre dans ce rang, il ne faut placer ſous ce rang-là que ce qui lui appartient, & reſerver le reſte pour le rang ſuivant. Par exemple, ſi l'addition des chiffres du premier rang fait* quatorze, *comme ce nombre vaut une dizaine & quatre unitez, & qu'on ne peut placer dans ce rang que des unitez, j'écris ſeulement* 4 *ſous ce rang, & je reſerve une dixaine pour le rang ſuivant.*

EXEMPLE. Ces deux ſommes 459 & 665, ſont

ſont données ; on veut ſavoir le nombre qu'elles ſont étant ajoûtées en une ſomme. Je diſpoſe ces deux ſommes comme elles doivent être diſpoſées, dans la maniere que vous le voyez.

459
665

Je dis premierement, 9 & 5 font 14, j'écris donc 4 dans le premier rang, & je retiens une dixaine pour le ſecond. Après je dis, une dixaine que j'ai retenue avec ces deux chiffres 5 & 6, qui ſont dans le ſecond rang, fait douze dixaines ; j'écris donc deux dixaines, poſant 2 dans le rang des dixaines, & je reſerve dix dixaines ou une centaine pour le troiſieme rang. Venant à ce troiſieme rang je dis, une centaine que j'ai retenue avec 4 & 6, fait onze centaines, ce qui vaut un mille plus un cent ; ce que j'exprime, poſant 1 dans le rang des centaines, & 1 mille dans le rang des mille : Et cela me donne cette ſomme.

459
665
1124

459
665
1124

3°. *Si l'addition des nombres, de quelque rang que ce ſoit, produit un nombre juſte de dixaines ; par exemple, ou une, ou deux, ou trois, &c. on met ſeulement un zero ſous ce rang, & le chiffre dans le rang ſuivant. Cette règle eſt une ſuite de la précédente.*

EXEMPLE. Il faut ajouter ces deux nombres 575 & 425 : je les diſpoſe ſelon la premiere règle ; après je dis, 5 & 5 font 10, je ne marque ſelon cette troiſieme règle, qu'un zero ſous ce premier rang, & je reſerve 1 pour le ſuivant. Enſuite je dis, 1 avec 7, & 2 qui ſont dans le ſecond rang fait 10 ; je ne dois donc marquer encore par la même

regle qu'un zero ſous ce rang, & reſerver 1, qui avec 5, & 4 du rang ſuivant fait encore 10; ainſi je n'écris que zero ſous ce rang, & je place 1 dans le rang ſuivant, qui eſt celui des mille. La ſomme de ces deux nombres eſt donc un mille.

	575
	425
	1000

Autre Exemple. Soient ces deux nombres 5678, & 4625, donnez pour être ajoutez. 1°. Je les diſpoſe comme il a été enſeigné. 2°. J'ajoute les unitez qui font 13, j'écris donc ſeulement 3 dans le rang des unitez, & je reſerve une dixaine pour le rang ſuivant.

	5678
	4625
	10303

3°. Je viens à ajouter les dixaines, & je trouve neuf dixaines, qui avec celle que j'avois reſervée font dix dixaines, c'eſt-à-dire une centaine que je ne puis placer dans ce deuxieme rang, où je marque un zero pour faire voir ſeulement que le nombre ſuivant eſt le troiſieme rang.

4°. Je fais l'addition du 3e rang, où je trouve 12 centaines, qui avec celle que j'avois reſervée font 13 centaines. Je n'en puis placer que trois dans ce troiſieme rang; je reſerve donc les dix autres ou un mille pour le quatrieme rang, qui eſt celui des mille.

5°. Je trouve dans le quatrieme rang neuf mille, ce qui fait avec celui que j'ai reſervé une dixaine de mille que je marque dans le cinquieme rang, après avoir mis un zero pour remplir la place du quatrieme, ce qui étant fait, je ſai que 5678 avec 4625, fait 10303.

4°. *Une addition de pluſieurs zero ne produit qu'un zero, puiſque pluſieurs fois rien ne fait rien; ainſi ces additions ſe font fort vîte. Il ne faut qu'a-*

qu'ajoûter les autres chiffres & mettre ensuite autant de zero qu'il est nécessaire afin que ces chiffres se trouvent dans le rang qui leur convient.

EXEMPLE. Ces trois nombres 2000, 3000, 4000, sont donnés pour être ajoutez. Il est facile de le faire: car puisque les zero ne servent qu'à occuper les premiers rangs, & faire paroître que les autres chiffres qui sont placez ensuite des zero sont dans un rang plus reculé; après avoir disposé ces sommes comme il a été dit, il ne faut qu'ajouter 2 avec 3, & avec 4, ce qui fait neuf, & après 9 marquer trois zero, ce qui fera neuf mille, somme que l'on cherchoit.

	2000
	3000
	4000
	9000

Exemple d'addition. Ces cinq nombres sont donnez 4567, 7919, 3488, 5896, 7685. Après les avoir disposez selon la coutume,

1°. J'ajoute les unitez qui sont dans le premier rang, où j'en trouve trente-cinq, qui valent trois dixaines plus 5 unitez; je marque donc seulement sous le rang des unitez, 5.

2°. Dans le deuxieme rang je trouve 32 dixaines, qui avec les trois dixaines que j'avois reservées, valent trois centaines, plus cinq dixaines; je reserve pour le rang suivant 3 centaines, & je pose dans celui-ci cinq dixaines.

	4567
	7919
	3488
	5896
	7685
	29555

3°. Dans le troisieme rang il y a 32 centaines, qui avec les trois que j'avois reservées valent trois mille plus cinq-cens; j'écris dans ce rang des centaines, cinq-cens, & je reserve trois-mille pour le rang des mille.

4°. Dans le rang des mille il y a 26 mille qui avec les trois-mille reservez font deux di-

xaines de mille plus neuf mille ; je pose les neuf mille dans ce rang, & dans le suivant deux dixaines de mille : si bien que ces cinq sommes valent 29555.

9 Quand les nombres sur lesquels on opere sont trop grands, ce qui arrive lorsqu'il y a plusieurs chiffres sur une même ligne, il faut, pour éviter la confusion, partager les rangs de trois en trois sur une ligne, ou par un petit espace vuide, comme nous l'avons dit *sup.* n. 3. Mais quand on a plusieurs nombres à ajouter sur une même colomne, alors il est à propos pour ne pas s'embrouiller, de partager l'operation & de ne pas ajouter ces nombres tout à la fois. Par exemple, s'il y avoit 30 nombres ou sommes differentes, on doit les partager par des lignes en plus ou moins de parties, selon qu'on a l'esprit plus ou moins fort, comme ici ayant 30 sommes il en faut faire si on veut six portions, & les transcrire ailleurs pour operer sur chacune séparément ; on ajoute ensuite ces sommes partiales en une totale qui comprendra les trente premieres sommes : ou bien à côté de chaque rang aussi-tôt qu'on a compté jusqu'à dix, on met un point, comme vous le voyez dans cet Exemple ; où après avoir disposé les sommes comme à l'ordinaire, ajoutant les nombres du premier rang, comme 9 & 8 font dix-sept, je mets à côté de huit un point, & je dis 7 & 3 font 10. Je marque donc un point à côté du 3. Ensuite je dis 6 & 7 font treize. Je marque donc encore un point à côté de 7, & je dis 3 & 8 font onze. Je marque un point à cô-

45 3 8. 9	
6. 7. 5. 3 8.	
2 4 6 5. 3.	
1 8. 7. 9 6	
5. 6. 4 6. 7.	
7 5 9. 4 8.	
2 8 8 7 9 1	

à côté du 8, & 1 ſous le premier rang. Je compte ces points qui ſont quatre, qui me font connoitre qu'il y a quatre dixaines de reſervées pour le rang ſuivant. Je laiſſe le reſte de cette queſtion à réſoudre pour vous exercer. Vous voyez qu'on ne ſe peut pas brouiller, parce que l'on ne fait que de très petites additions.

L'artifice de cette premiere operation ne conſiſte, ainſi que je l'ai dit, qu'en ces deux choſes, à faire les additions par parties, & à exprimer ſur le papier les additions partiales qu'on fait dans ſon eſprit. Il en ſera de même des trois autres operations ſuivantes. Je commence de haut en bas faiſant l'addition de chaque rang, ajoutant le nombre qui eſt deſſus avec celui qui eſt deſſous. On peut ſi on veut monter de bas en haut, ajoutant le nombre qui eſt deſſous avec celui qui eſt deſſus. C'eſt une même choſe. La preuve de l'addition ſe fait par la ſouſtraction, comme nous le verrons. Elle en a une autre qu'on nomme la preuve de 9: voilà en quoi elle conſiſte. Sans avoir égard au rang des chiffres, dans les nombres propoſez, on les ajoute les uns aux autres, & on en rejette 9 autant qu'il ſe peut. On fait la même choſe dans la ſomme générale de tous ces nombres; & ſi après en avoir rejetté 9 il y a un même reſte, c'eſt une marque (équivoque comme on le verra) qu'on ne s'eſt pas trompé; ce qu'un Exemple fera comprendre. On veut ſavoir ſi D *eſt veritablement la ſomme des trois nombres* A. B. C. *Commençant par* A, *je dis. Ces quatre chiffres* 3. 5. 8. 1. *font* 17, *d'où ayant rejetté* 9 *le reſte eſt* 8. *Ce reſte avec ces trois chiffres*, 2. 3. 5. *du nombre* B *font* 18, *d'où ayant rejetté* 9 *autant qu'on le peut, il ne reſte rien: on n'a point d'égard aux*

A	3581
B	2350
C	6013
D	11944

zero dans cette operation. Venant à C, *ces trois chiffres* 6. 1. 3. *font* 10. *d'où ayant rejetté* 9 *il reste* 1. *Or assemblant de même les chiffres de* D 1. 1. 9. 4 4. *on fait* 19, *d'où ayant rejetté* 9. *autant qu'on le peut, il reste encore* 1. *ainsi selon cette preuve* D *est effectivement l'addition des nombres* A. B. C. *Le fondement de cette preuve, c'est que les chiffres de tout nombre dans lequel* 9 *est contenu exactement un certain nombre de fois, sans avoir égard à leur ordre, joints ensemble font* 9, *ainsi les chiffres de ces nombres* 18. 27. 36, 45. 54. *&c. dans lesquels* 9 *est contenu exactement tant de fois, font tous* 9. *Il en est de même des grands nombres; par exemple,* 108. 216. *où neuf est contenu tant de fois exactement. On n'a point d'égard aux zero. Dans* 108. *vous voyez que* 1 *&* 8 *font* 9, *comme dans* 216. *ces trois chiffres* 2. 1. 6. *font aussi* 9. *Mais cette preuve n'est pas infaillible; car la même chose arriveroit soit que* D *fût* 11944. *ou* 19144.: *il y a pourtant bien de la difference. Ainsi ce n'est que pour satisfaire la curiosité que je la propose.*

CHAPITRE II.

SECONDE OPERATION.

SOUSTRACTION.

Definition de la Soustraction.

11 *LA Soustraction est une operation par laquelle on ôte d'un plus grand nombre un plus petit, & l'on marque ce qui reste après cette Soustraction, lequel reste est la difference de ces nombres, comme il est évident: ayant ôté* 8. *de* 12, *le reste, qui est* 4. *est la difference de* 8 *&* 12.

PRO-

PROPOSITION SECONDE.

PROBLEME SECOND.

Deux nombres étant donnez, ſouſtraire le plus petit du plus grand, & connoitre ce qui reſte, ou la difference de ces deux nombres.

1°. *Il faut placer le nombre qui eſt le plus petit ſous le plus grand; les unitez ſous les unitez; les dixaines ſous les dixaines, &c. Après commençant cette operation par le premier rang de droite à gauche, il faut retrancher le plus petit du plus grand & marquer ce qui reſte; ſi ce ſont des unitez qui reſtent, marquer ces unitez ſous les unitez, &c. & ce reſte ſera la difference qu'il y a entre les deux nombres donnez.* 12

EXEMPLE. Les deux nombres donnez ſont 869, & 234. Il faut retrancher le ſecond du premier. Je les diſpoſe comme il a été dit, 234 ſous 869. De 9 j'ôte 4, il reſte 5, que je marque ſous le premier rang; enſuite je dis, de 6 ôtez 3, il reſte 3, que j'écris ſous le deuxieme rang. Enfin de 8 j'ôte 2: le reſte eſt 6, que j'écris ſous le troiſieme rang. Ainſi après avoir ôté 234 de 869, il reſte 635, qui eſt la difference de 869 avec 234.

869	
234	
635	

2°. *Lors que le chiffre qu'on veut retrancher, eſt plus grand que celui de qui on veut le retrancher, il faut pour augmenter ce dernier, emprunter une dixaine dans le rang ſuivant.*

EXEMPLE. Les nombres 678 & 489 ſont donnez, il faut retrancher le plus petit du plus grand; je ne puis pas ôter 9 de 8, c'eſt pourquoi, ſelon la règle, j'emprunte une

dixaine du rang ſuivant, au lieu de 7 écrivant un 6; & après je dis, de 18 ôtant 9, il reſte 9, que je place dans ſon rang. Enſuite je viens au deuxieme rang où eſt 6, duquel ne pouvant encore ſouſtraire 8, j'emprunte de la même maniere une dixaine du chiffre ſuivant, & je dis, de 16 ôtant 8, il reſte 8. Enfin venant au dernier chiffre, qui ne vaut plus que 5, je retranche 4, & il reſte 1: ainſi de 678 retranchant 489, il reſte 189, qui eſt la difference de ces deux ſommes.

	56
	678
	489.
	189

13 Au lieu de changer les chiffres du nombre ſuperieur, il n'y a qu'à augmenter ceux de deſſous dans le nombre inferieur; comme ayant ici emprunté une dixaine de 7 chiffre ſuivant de droite à gauche pour l'ajouter à 8 qui précede, au lieu d'effacer 7 & d'écrire 6 en ſa place, il n'y a qu'à augmenter le chiffre 8 du rang inferieur qui eſt deſſous 7, diſant, de 7 j'ôte 9; ce que ne pouvant faire ſans emprunter encore du chiffre ſuivant une dixaine, je dis de même, de 17 ôtant 9 reſte 8; & enſuite au lieu de dire de 6 ôtant 4, je dis, de 6 ôtant 5 reſte 1, ce qui produit toujours la même choſe: l'avantage de cette méthode c'eſt qu'on n'efface pas les chiffres. Elle eſt plus facile dans la pratique; & je n'ai propoſé la premiere que parce qu'elle eſt plus facile à entendre pour ceux qui commencent.

3°. *Quand il ſe trouve un zero dans le nombre qui eſt deſſous, on met entre les nombres reſtans celui ſous lequel le zero eſt placé, puiſque d'un tel nombre n'ôtant rien, ce nombre doit reſter tout entier.*

EXEMPLE Soient donnez ces deux nombres

bres 842, & 405, pour retrancher le plus petit du plus grand : après avoir placé 405 sous 842, je considere qu'on ne peut ôter 5 de 2, le plus grand nombre du plus petit ; j'emprunte donc du deuxieme rang une dixaine, écrivant 3 au lieu de 4, & puis je dis, de 12 ôtez 5, reste 7 ; ensuite de 3 ôtez zero, c'est-à-dire rien, reste le nombre entier, sous lequel zero est placé. Je marque donc 3 au deuxieme rang. Enfin de 8 je retranche 4, le reste est 4. De cette soustraction vient 437, qui est le reste de 842, dont on a retranché 405 ; ainsi 437 est la difference de ces deux nombres.

	3
	842
	405
	437

4°. *Quand le nombre qui doit être retranché est égal à celui de qui on le retranche, comme il ne reste rien, on met un zero qui en est la marque.*

Exemple. S'il falloit ôter 246 de 346 : puisque 46 est égal à 46, selon la règle je mets deux zero, & retranchant 2 de 3, dont le reste est 1, l'operation me donne 100, qui est le nombre que je cherchois.

	346
	246
	100

5°. *Quand sous un zero il y a un zero, il faut mettre un zero pour conserver la valeur des caracteres qui suivent, & qui précedent.*

Exemple. Ces deux nombres sont donnez 800, & 200 ; je retranche simplement du chiffre 8 le chiffre 2, il reste 6, après lequel chiffre je mets deux zero pour faire voir que 6 est le reste de 8 cens, dont on a retranché deux cens.

donnez	
	800
	200
	600

6°. *Lors que dans le nombre dont on retranche un autre nombre, il y a plusieurs zero de suite ; de sorte qu'on ne peut emprunter une dixaine du*

rang ſuivant pour faire la ſouſtraction des nombres qui doivent être retranchez ; il faut, ou exprimer le nombre d'une autre maniere, en ſorte qu'il y ait d'autres caracteres que des zero ; comme ſi ce nombre étoit 10000, *l'exprimer ainſi* 9990 *plus* 10, *ce qui eſt la même choſe, (car, neuf-mille neuf-cens quatre-vingt-dix, plus dix, font dix-mille) : ou plutôt, il faut faire cette ſouſtraction, en empruntant, ou ſuppoſant des dixaines pour ſupléer aux zero, comme on fait lors que dans le nombre ſuperieur il y a pluſieurs chiffres de ſuite plus petits que ceux de l'inferieur ; parce que tous ces emprunts ſe reprendront ſur le premier chiffre de valeur qu'on rencontrera.*

PREMIER EXEMPLE. Soient donnez ces deux nombres 900 & 432 ; pour retrancher ce petit nombre 432 du plus grand 900 : ne pouvant rien ſouſtraire de deux zero, au lieu de 900 j'écris huit cens nonante, & je conſerve dix en ma memoire pour le premier rang ; car 890 plus 10, ſont la même choſe que 900. Je retranche 2 de ce nombre 10 que j'ai retenu, il reſte 8, que je mets ſous le premier rang ; de 9 je retranche 3, & je poſe le reſte qui eſt 6, ſous le deuxieme rang ; de 8 je retranche 4, reſte 4, que j'écris ſous le troiſieme : ainſi le reſte de 900 après en avoir ôté 432, eſt 468 ; ce que l'on cherchoit.

	890
	900
	432
	468

SECOND EXEMPLE. Soit le nombre 80000, duquel il faut retrancher ce plus petit 53642. D'abord, ne pouvant ſouſtraire 2 de zero, ou de rien, j'emprunte une dixaine du rang ſuivant, ſans avoir égard à ce que ce n'eſt qu'un zero, pour la raiſon que j'ai rapportée ; de 10 ôtant 2, reſte 8. Du ſecond zero qui

	80000
	53642
	26358

qui même doit un ne pouvant ôter 4, j'emprunte encore 10, quoique le chiffre ſuivant ne ſoit non plus qu'un zero, de ce 10 je retranche 5 à cauſe de la dixaine qu'on a prêtée au premier zero, & cela ſelon la méthode enſeignée *ſup.* n. 13 qu'il faut toujours pratiquer comme plus aiſée, & le reſte eſt 5. De même pour le troiſieme zero je ſuppoſe une dixaine, de laquelle ôtant 7 il reſte 3. Je viens au quatrieme rang, où ayant ſuppoſé 10 au lieu de zero & en ayant ôté 4 le reſte eſt 6. Comme les 8 dixaines de mille du dernier rang n'en valent plus que 7, parce qu'on en a prêté une pour les rangs précédens, il faudroit donc effacer 8 & écrire 7 en ſa place; mais il n'y a qu'à augmenter encore le chiffre de deſſous d'autant, ſavoir d'une dixaine de mille; ainſi au lieu d'effacer 8, & de récrire 7 pour en ôter 5, j'ôte tout d'un tems 6 de 8, & reſte 2. Partant j'ai le nombre 26358 reſte de 80000 après en avoir retranché nonobſtant les zero le nombre 53642; & c'eſt ce qu'on cherchoit.

Exemple de Souſtraction. Les deux nombres 5782 & 3456. ſont donnez pour être retranchez de ce troiſieme 68386. Il faut ajouter par la premiere propoſition les deux premiers dans une ſomme qui ſera 9238. Après qu'on s'eſt beaucoup exercé à faire ces operations, on peut faire cette addition en ſon eſprit; mais dans les commencemens il eſt bon de la faire avec la plume.

Je place 9238 fait de l'addition de 5782 avec 3456, ſous la ſomme 68386, comme dans les autres exemples. Enſuite commençant par les unitez du premier rang, je dis, de 6 on ne peut ôter 8, j'emprunte donc une dixaine du rang

fuivant, qui avec les 6 unitez font 16 ; de 16 ôtant 8, reſte 8, que je marque ſous ce premier rang des unitez. Après venant au deuxieme rang, je dis, de 7 dixaines, ôtez 3, reſte 4 ; je dis de 7, car vous ſavez que nous avons déja ôté une dixaine de ce rang. Au troiſieme rang je dis, de 3, ôtez 2, reſte 1. Au quatrieme rang, de 8 je ne puis ôter 9, j'emprunte du rang ſuivant, qui eſt celui des dixaines de mille, une dixaine de mille, qui avec les 8 mille de ce quatrieme rang, fait 18 mille ; je dis donc, de 18 mille ôtez 9 mille, reſte 9 mille.

	5 7
	68386
	9238
	59148

Enfin venant au cinquieme rang, puiſqu'il n'y a rien qui en doive être retranché, je marque avec les autres ce que je trouve dans ce rang, ſavoir 5, car des 6 dixaines de mille qui reſtoient, j'en avois déja retranché une dixaine.

Le reſte donc de 68386, après en avoir retranché les deux ſommes 5782, & 3456, le reſte, dis-je, eſt 59148.

Autre Exemple. Voilà encore un Exemple de ſouſtraction faite ſelon la maniere que nous avons propoſée *ſup.* n. 13. Soit

Somme	493025
à ſouſtraire.	257532
Reſte	235493

829
493025
257532
235493

Je dis ainſi ; Qui de 5 ôte 2, ou ſimplement 2 de 5, reſte 3.

Enſuite : Qui de 12 paye 3 reſte 9.

Et je retiens 1 par mémoire que j'ajoute à 5, ce qui fait 6. Je dis : Qui de 10 paye 6, reſte 4 : & je retiens 1 que j'ai emprunté, que je joins à 7, ce qui fait 8, que

8, que j'ôte de 13, reſte 5; & je retiens par mémoire 1 que j'ai emprunté, lequel avec 5 fait 6, que j'ôte de 9, & reſte 3; & puis 2 de 4, reſte 2. Cette maniere eſt plus prompte & charge moins de chiffres que la ſeconde, dans laquelle on écrit les reſtes après avoir emprunté, comme vous le voyez dans la maniere ordinaire.

PROPOSITION TROISIEME.

THEOREME PREMIER.

La ſouſtraction & l'addition ſe ſervent réciproquement de preuve l'une à l'autre.

La ſouſtraction & l'addition ſont oppoſées l'une à l'autre: l'une défait ce que l'autre a fait; ainſi elles ſe ſervent réciproquement de preuve. Car le tout étant égal à ſes parties, ſi on ôte toutes les parties du tout, il ne doit rien reſter, ſi on n'en ôte que quelques-unes, on aura les autres pour reſte, par conſéquent on ſera aſſuré, que 677 eſt veritablement la ſomme de 432 & de 245 ajoutés enſemble, l'un des deux étant ôté de l'entier 677, il reſte l'autre; ou ſi tous deux étant retranchez de 677, il ne reſte rien, cela, dis-je, eſt une marque qu'ils ſont véritablement les parties de ce tout, & par conſéquent que l'addition a été bien faite.

De même, pour être aſſuré qu'en retranchant de 677, ce nombre 432, le reſte eſt 245, c'eſt-à-dire que 432 & 245 ſont les parties du tout 677, j'ajoute ces deux nombres 432 & 245; & s'ils font 677, je conclus qu'ils ſont véritablement les parties de 677, & par conſéquent que mon operation eſt bonne.

Ces

Ces operations ſont ſi ſimples, qu'on ne concevroit pas comment l'on s'y peut tromper, ſi l'expérience ne nous en convainquoit. L'on n'ajoute enſemble que deux nombres à la fois, dont chacun ne peut être plus grand que neuf, & chacun des nombres qu'on retranche l'un de l'autre, n'excede pas la même valeur. Cependant on eſt quelquefois obligé de recommencer, parce qu'on voit que ce que l'on a fait ne quadre pas; ſans s'appercevoir d'abord en quoi on s'eſt pu tromper. La cauſe de l'erreur c'eſt qu'on va trop vîte, & que ſans bien prendre garde à ce qu'on fait; en calculant, on dira, par exemple, 5 & 6 ſont treize. On compte là-deſſus comme ſi cela n'étoit pas faux. Toutes nos erreurs, en quelque matiere que ce ſoit, ont la même cauſe. Nous ſuppoſons ſans déliberation, que les choſes les plus fauſſes ſont certaines, & après nous en tirons des concluſions comme de principes infaillibles. Puiſque ce petit Ouvrage eſt fait pour ſervir de modele de la maniere de bien conduire ſon eſprit dans les Sciences, il faut faire attention à cette Remarque.

CHAPITRE III.

OPERATION TROISIEME.

MULTIPLICATION.

Définition de la Multiplication.

15 *LA Multiplication eſt une eſpece d'Addition, par laquelle on ajoute un certain nombre donné autant de fois à lui-même, qu'il y a d'unitez dans un autre nombre donné.*

Multiplier 5 par 6, ce qui fait 30, c'eſt ajouter autant de fois 5 à lui-même qu'il y a d'unitez dans 6. On appelle *multiplicateur* le nombre qui

qui multiplie, & on appelle *produit* le nombre que l'on cherche, & que la multiplication produit. Dans cet exemple, 5 étant donné pour être multiplié par 6, ce deuxieme nombre 6 eſt le multiplicateur, & 30 qui eſt fait par cette multiplication, eſt le produit.

PROPOSITION QUATRIEME.

PROBLEME TROISIEME.

Multiplier un nombre par un autre nombre, & connoître ce que produit leur multiplication. 16

1°. *Il faut placer le multiplicateur ſous le nombre à multiplier, comme dans l'addition; enſuite commençant de droite à gauche multiplier le nombre à multiplier par le premier chiffre du multiplicateur, & écrire leur produit comme on fait la ſomme d'une addition.*

EXEMPLE. Soit propoſé 24 pour être multiplié par 3: je place le multiplicateur 3 ſous 4; Et je dis, 3 fois 4 font 12; je poſe 2 au premier rang, & je retiens dans ma mémoire une dixaine pour le rang ſuivant; je dis, 3 fois 2 font 6, & 1 que j'avois retenu ſont 7; le produit de 24 multiplié par 3, eſt donc 72.

24	
3	
72	

2°. *Lorſque le multiplicateur eſt compoſé de pluſieurs caracteres, on multiplie premierement par le premier de ces caracteres le nombre à multiplier: enſuite par le ſecond, & ainſi des autres, mettant le premier produit de chacune de ces multiplications partiales ſous le caractere qui a multiplié. Après cela, l'on ajoute dans une ſomme ces multiplications partiales, dont l'addition donne le nombre qu'on cherchoit.*

Nous l'avons déja dit, l'artifice de ces quatre pre-

premieres operations dont nous parlons dans cette Section, consiste à faire par parties ce qu'on ne pourroit faire tout à la fois. La multiplication n'a rien de plus difficile que l'addition. Il ne s'agit que d'exprimer sur le papier une certaine somme ou produit, plaçant bien les chiffres dans le rang qui leur convient.

EXEMPLE. 84 est le nombre à multiplier par le multiplicateur 26; on demande quel est le produit de cette multiplication. Je place 26 sous 84, après je multiplie premierement 84 par 6, disant 6 fois 4 fait 24; je pose 4 & retiens 2 dixaines; 6 fois 8 fait 48, lequel produit avec 2 que j'avois retenu fait 50: j'écris donc 50 après 4. Ensuite je multiplie le même nombre 84 par le deuxieme chiffre du multiplicateur 26, qui est 2; & je dis, 2 fois 4 fait 8. Or il faut remarquer que ce 2 valant deux dixaines, c'est la même chose que si je disois 20 fois 4 fait 8 dixaines; j'écris donc 8 sous le deuxieme rang, qui est celui des dixaines; après je dis, 2 fois 8 font 16, je pose 6 dans le troisieme rang, & 1 dans le quatrieme, car 20 fois 8 dixaines valent 16 centaines ou cent soixante dixaines, c'est-à-dire seize-cens unitez; ainsi ces rangs conviennent à 1 & à 6. Ces deux multiplications étant faites, j'ajoute les deux produits dans une somme, qui est 2184, produit de 84 multiplié par 26.

84
26
504
168
2184

3°. *Dans une multiplication, lorsque les zero se trouvent au commencement, soit du multiplicateur, soit du nombre à multiplier, on multiplie les nombres par les nombres: & on place après les produits, les zero, tant du multiplicateur que du nombre à multiplier.*

EXEM-

EXEMPLE. Que 80 ſoit à multiplier par 60, je place 60 ſous le nombre à multiplier 80; après cela je multiplie 80 par le premier caractere du multiplicateur 60, qui eſt un zero; ce qui ne produiſant rien, je marque un zero ſous le rang des unitez.

Enſuite multipliant 80 par 6, & premierement zero par 6, cette multiplication n'ayant aucun produit, puiſque 6 fois rien ne vaut pas plus qu'un rien, je place un zero ſous le rang des dixaines; enfin je multiplie 8 par 6, dont le produit eſt 48; je place 8 dans le rang des centaines, & 4 dans le rang des mille: & je trouve que 80 par 60 fait 4800. Ainſi vous voyez que dans de ſemblables exemples, il ſuffit, ſelon la règle précédente, de multiplier les chiffres par les chiffres, 8 par 6; & de placer enſuite les zero de la ſomme qui doit être multipliée, & ceux du multiplicateur. Ces zero ſervent ſeulement à faire connoître que ce nombre 4800, eſt fait de la multiplication de 8 dixaines par 6 dixaines, ce qui fait 48 centaines.

80
60
4800

4°. *Quand le multiplicateur eſt* 1, *avec un ou pluſieurs zero, il faut ſeulement placer après le nombre qui doit être multiplié, les zero de ce multiplicateur; mais ſi c'eſt le nombre à multiplier qui eſt* 1 *avec un ou pluſieurs zero, alors il faut placer ces zero après le multiplicateur.*

EXEMPLE. Je veux multiplier 342 par 100; pour faire cette operation, j'écris ſeulement après le nombre à multiplier 342, les deux zero du multiplicateur 100, ce qui fait

34200,

34200, lequel nombre eſt le produit de cette multiplication. La certitude de cette operation eſt manifeſte : en multipliant 342 par 100, je cherche un nombre qui vale cent fois 342. Or pour augmenter la valeur de 342 de cent fois plus que ces caracteres ne valent, il n'y a qu'à les reculer de deux rangs, ce qui ſe fait en mettant deux zero après 342 de cette ſorte, 34200; car 2 pour-lors vaudra cent fois plus qu'il ne valoit, 4 qui eſt le deuxieme chiffre cent fois plus qu'il ne valoit, ſavoir 4 mille; & 3 vaudra 30 mille, ce qui eſt cent fois plus qu'il ne valoit auparavant. Mais ſi c'eſt 100 qu'il faut multiplier par le multiplicateur 342, j'écris après lui les deux zero du nombre à multiplier, & cela donne le même nombre 34200, comme il eſt évident; car cent fois 342, & trois-cens quarante-deux fois 100, ſont une même choſe.

342	
100	
34200	
100	
342	
34200	

5°. *Les Zero ne multiplient point, puiſque cent riens ne valent pas plus qu'un rien : cependant il faut marquer ces Zero pour remplir la place où ils ſe trouvent, & pour conſerver la valeur des nombres qui ſuivent & qui précedent.*

Exemple. Soit donné le nombre de 670 pour être multiplié; le multiplicateur eſt 305; je diſpoſe ces nombres comme il a été enſeigné. Je commence l'operation par 5, premier caractere du multiplicateur, & je dis, 5 fois zero, ou 5 fois rien ne produit rien; je marque cependant un zero pour remplir ce premier rang, afin de conſerver la valeur des chiffres ſuivans; enſuite je dis, 5 fois 7 font 35,

670	
305	
3350	

je

je poſe 5, qui vaut 5 dixaines dans le rang des dixaines, & je retiens 3 centaines: Après je dis, 5 fois 6 font 30, qui avec les trois centaines que j'ai reſervées, fait 3 mille, plus 3 centaines; je place ces mille & ces centaines dans leur propre rang.

Je viens au deuxieme caractere du multiplicateur 305, qui eſt un zero, & parce que ce zero ne peut multiplier 670, je marque ſeulement un zero ſous ce deuxieme rang pour conſerver, comme j'ai déja dit, la valeur des caracteres ſuivans. Je viens au troiſieme chiffre, qui eſt 3, par lequel je multiplie 670, diſant 3 fois zero ne produiſent rien, je marque cependant un zero dans le troiſieme rang: 3 fois 7 font 21, je place 1 dans le quatrieme rang, reſervant 2 pour le cinquieme. Enfin je dis, 3 fois 6 font 18, qui avec les 2 que j'avois reſervé, font 20, que je marque dans le rang qui convient.

670
305
3350
0
2010
204350

Après j'ajoute ces trois multiplications partiales en une ſomme, qui eſt 204350, produit de 670 multiplié par 305.

CHAPITRE IV.

QUATRIEME OPERATION.

DIVISION.

Définition de la Diviſion.

LA Diviſion eſt une eſpece de Souſtraction, par laquelle on retranche d'un grand nombre un autre nombre plus petit ou égal, autant 17

de

de fois qu'on le peut, c'eſt-à-dire autant de fois qu'il y eſt contenu.

Le premier nombre s'appelle *le dividende* ou *nombre à diviſer*, & le deuxieme *le diviſeur*. Le nombre qui exprime combien le *diviſeur* eſt contenu dans celui qui eſt à diviſer, s'appelle le *quotient* de la diviſion.

Ce quotient eſt contenu dans le nombre à diviſer autant de fois qu'il y a d'unitez dans le diviſeur; c'eſt pourquoi on ſe ſert de cette règle, lorſqu'on veut partager un grand nombre donné. Diviſer 24 par 6, c'eſt chercher combien 6 eſt contenu de fois dans 24. Il y eſt contenu quatre fois, ainſi ce nombre 4 eſt le quotient de cette diviſion, lequel quotient eſt contenu autant de fois dans 24, qui eſt le nombre à diviſer, qu'il y a d'unitez dans 6, qui eſt le diviſeur.

PROPOSITION CINQUIEME.

PROBLEME QUATRIEME.

Diviſer un nombre donné par un autre donné.

18 1°. *Il faut écrire le diviſeur ſous les premiers chiffres du nombre à diviſer, commençant de gauche à droite, faiſant le contraire de ce qui a été fait dans les Operations précédentes : après cela l'on doit voir combien le diviſeur eſt contenu dans le nombre à diviſer, & écrire le quotient de cette diviſion à part.*

EXEMPLE. Que ce nombre 64 ſoit donné à diviſer par le diviſeur 2. 1°. Je place le diviſeur 2. ſous 6, premier caractere du dividende 64, commençant de gauche à droite. 2°. Je vois combien 2 eſt contenu de fois dans 6 : il y eſt contenu 3 fois, lequel 3 je poſe à part comme vous voyez. 3°. Je multiplie 3 par 2, le

le produit eſt 6, que j'ôte du nombre à diviſer 6, pour m'aſſurer que la diviſion de 6 par 2 eſt bien faite : car ſi ôtant 2 } 3
3 fois 2 de 6, il ne reſte rien, c'eſt une preuve que 3 fois 2 font les parties de 6, & par conſéquent que 2 eſt véritablement 3 fois en 6. Je fais la même choſe dans toutes les operations de la diviſion.

Il reſte encore à diviſer 4 par 2, ce qui ſe fait en avançant le diviſeur 2, & le plaçant ſous 4 : comme nous l'enſeignerons dans l'article 6°. ci-deſſous.

2°. *Si le diviſeur a pluſieurs caracteres, on conſidere ſeulement combien ſon premier caractere de gauche à droite eſt contenu dans le nombre ſous lequel il eſt placé ; après on multiplie tout le diviſeur par le quotient, & on retranche le produit de cette multiplication du nombre diviſé, laquelle ſouſtraction fait connoitre ſi on a bien diviſé.*

Exemple. Soit le nombre donné 84, pour être diviſé par le diviſeur 42 : je diſpoſe ces nombres comme il a été enſeigné ; je ne cherche pas d'abord combien tout le diviſeur 42 eſt contenu dans le nombre 84, je vois ſimplement combien 4 eſt contenu dans 8 : il y eſt 2 fois, ce que je marque ; mais auſſi pour m'aſſurer ſi tout le diviſeur 42 eſt véritablement deux fois dans le nombre à diviſer 84, & ſi 42 par conſéquent 2 eſt le quotient de cette diviſion, je multiplie ce diviſeur entier par le quotient 2, & trouvant que 2 fois 42 font 84, je ne puis plus douter que l'operation que j'ai faite, ne ſoit certaine.

$\left.\begin{matrix} 84 \\ \hline 42 \end{matrix}\right\} 2$

Tout l'artifice de cette operation, comme des trois précédentes, ne conſiſte qu'en cela ſeul, qu'on fait par

par partie avec facilité, ce qu'on ne pourroit faire tout d'un coup sans peine, & sans danger de se tromper.

3°. *Si ayant multiplié le diviseur par le quotient, il se trouve que le produit est plus grand que le nombre à diviser; c'est une marque que ce quotient est trop grand, & qu'il en faut prendre un plus petit.*

4°. *Si le diviseur n'est pas contenu exactement, c'est-à-dire un certain nombre de fois dans le nombre à diviser, il faut marquer à part ce reste.*

EXEMPLE. 82 est le nombre donné pour être divisé; le diviseur est 24: le premier chiffre du diviseur 24 qui est 2, est 4 fois dans 8, premier chiffre du nombre à diviser; mais parce qu'ayant multiplié par ce quotient 4 le diviseur 24, le produit est 96, qui est plus grand que le nombre à diviser 82, je reconnois que ce quotient est trop grand; j'en prends donc un plus petit, savoir 3. Je multiplie 24 par ce quotient 3, & j'en ôte le produit du nombre à diviser 82, disant, 3 fois 2 font 6, que j'ôte de 8, reste 2; j'efface 8 & j'écris 2; après 3 fois 4 font 12, que j'ôte de 22 & reste 10, j'efface 22 & j'écris 10; ainsi 24 est contenu 3 fois dans 82 avec ce reste 10. Lorsqu'on parlera des nombres rompus, on enseignera les moyens de diviser exactement ces restes. qu'on écrit, comme vous le voyez, après le quotient sur une ligne, & sous cette ligne le diviseur: C'est un nombre rompu que ce nombre.

1		
10	}	10
82	}	3
24		4

10
—
24

5°. *Si le diviseur n'est point contenu dans les premiers chiffres du nombre à diviser sous les quels*

quels on l'a placé, il faut le faire avancer ſous les caracteres qui precedent vers la droite.

EXEMPLE. Soit le nombre donné pour être diviſé 248, le diviſeur eſt 62. Ce diviſeur n'eſt contenu aucune fois dans 24, premiers chiffres du nombre à diviſer de la gauche à la droite. Je place donc ſuivant cette règle 62 ſous 48, & faiſant comme ci-deſſus, je trouve que 6 eſt 4 fois dans 24, ce que je marque. Je multiplie le diviſeur 62 par ce quotient, diſant 4 fois 6 font 24, que j'ôte de 24, & il ne reſte rien; après cela, je dis 4 fois 2 font 8, que j'ôte de 8, il ne reſte rien; ainſi je ſai que 62 eſt véritablement contenu 4 fois dans 248.

$$\left.\begin{matrix}248\\62\end{matrix}\right\} 4$$

6°. *Après que l'on a diviſé les premiers caracteres du nombre à diviſer, il faut avancer le diviſeur de la gauche à la droite, juſqu'à ce que l'on ait diviſé tout le nombre donné.*

EXEMPLE. Dans l'article premier ayant diviſé le premier chiffre 6, du nombre à diviſer 64, par le diviſeur 2, ce qui à *donné* 3 au quotient: pour achever l'operation, j'avance le diviſeur 2 & je le place ſous 4, effaçant, pour ne pas m'embrouiller, celui qui eſt deſſous 6, & 6 lui-même. Je trouve après cela que 2 eſt contenu 2 fois dans 4, ce que je marque après le premier quotient 3. je multiplie le diviſeur 2 par le dernier quotient trouvé qui eſt 2, le produit eſt 4, que je retranche de 4, & il ne reſte rien. Ainſi 2 eſt véritablement contenu 2 fois dans 4; & le véritable quotient de 64 diviſé par 2 eſt 32, ce que je voulois ſavoir.

$$\left.\begin{matrix}64\\22\end{matrix}\right\} 32$$

Autre Exemple. Soit le nombre 8678 à diviſer par 34 : après avoir mis ces nombres dans leur place, je dis 3 eſt contenu deux fois dans 8, ce que je marque au quotient. Je multiplie 3 par 2, le produit eſt 6, que j'ôte de 8, le reſte eſt 2, ce que je marque comme vous le voyez. Je multiplie 4 le ſecond chiffre du diviſeur par le quotient 2, diſant 2 fois 4 font 8, que j'ôte de 26, le reſte eſt 18.

8678	8
34	255
34	
34	

Je fais avancer le diviſeur, & je dis 3 eſt contenu 6 fois dans 18; mais ce quotient étant trop grand, j'en prends un plus petit, ſavoir 5, & je dis 5 fois 3 font 15 que j'ôte de 18, il reſte 3. Je multiplie 4, ſecond chiffre du diviſeur, par ce quotient 5, diſant cinq fois 4 font 20, que j'ôte de 37, & il reſte 17.

Je fais avancer une ſeconde fois le diviſeur, & je dis 3 eſt 5 fois dans 17, je poſe donc 5 au quotient; 3 fois 5 font 15, qui étant ôtez de 17, le reſte eſt 2; je multiplie par le quotient 5, l'autre chiffre du diviſeur, diſant 5 fois 4 font 20, de 28 ôtant 20, il reſte 8.

Ainſi ayant diviſé 8678 par le diviſeur 34, le quotient eſt 255, avec 8 de reſte, lequel reſte s'écrit de la maniere que nous avons dit qu'on le devoit faire.

Ce qui rend la Diviſion plus difficile que les trois premieres Operations, c'eſt que conſiderant combien le premier chiffre du diviſeur eſt dans le nombre à diviſer ſous lequel il eſt placé, il faut avoir égard aux

aux chiffres qui suivent ; car, comme on l'a bien compris, les règles de la Division ne se donnent que pour faire par parties l'Opération. Si on le pouvoit tout d'un coup, on auroit dit que 34 *est* 255 *fois avec* 8 *de reste dans* 8678; *mais cela étoit impossible. On fait donc peu à peu ce qu'on ne peut faire tout d'un coup. D'abord on examine seulement combien de fois le premier chiffre du diviseur est dans celui du nombre à diviser sous lequel il est placé; mais en même tems on fait attention aux chiffres de tout le diviseur : lorsqu'on est venu à diviser* 187 *par* 34, *considerant que* 34, *ne peut pas être* 6 *fois dans* 187, *comme* 3 *est* 6 *fois dans* 18, *on a vu qu'il falloit prendre un quotient plus petit que* 6. *Quand on n'a pas choisi le quotient qu'il falloit, & qu'on a par conséquent écrit des chiffres qu'il faut effacer, pour ne se pas brouiller, il faut récrire les nombres sur lesquels on opere.*

7°. *Quand le diviseur n'est pas contenu dans le nombre à diviser, sous lequel on l'avoit fait avancer, il faut mettre un zero au quotient.*

EXEMPLE. Le nombre à diviser est 24096; le diviseur est 48 ; je dispose ces nombres comme il a été dit.

1°. 48 n'étant aucune fois dans 24, je fais avancer ce diviseur, & je considere combien 4 est dans 24, il y est 6 fois ; mais parce que j'apperçois que 48 ne peut être 6 fois dans 240, & que par conséquent ce quotient 6 est trop grand, j'en prends un plus petit, savoir 5. Je multiplie le diviseur 48 par ce quotient 5, le produit de cette multiplication est 240, qui étant ôté de 240, il ne reste rien. Jusqu'à présent la division est bien faite, & je sai que 48 est contenu 5 fois dans les trois premiers caracteres du nombre à diviser 24096.

$$\left.\begin{array}{r} 24096 \\ \hline 48 \end{array}\right\} 5$$

2°. Je fais avancer le diviseur 48 en le plaçant sous 09; & parce qu'il n'est pas contenu dans ces caracteres, je place un zero après le premier quotient 5, pour conserver la valeur de ce premier quotient, & de celui qu'on trouve ensuite.

24096 — 4888 — 4 } 50

3°. Je fais avancer le diviseur 48 sous les caracteres 96 qui restent à diviser, & je dis 4 est en 9 deux fois; je marque ce 2 au quotient. Ensuite multipliant le diviseur 48 par ce nombre, je trouve que le produit 96 de cette multiplication est égal au nombre à diviser, par conséquent la division en a été bien faite. Ainsi 502 est le quotient de 24096 divisé par 48.

24096 — 4888 — 44 } 502

8°. *Lorsque le nombre à diviser a après lui plusieurs zero, si ce nombre peut être divisé exactement par le diviseur qui est au-dessous, cette division étant faite, on place après le quotient les zero de ce nombre à diviser, & la division est achevée.*

Exemple. 800 est à diviser par 4, je divise seulement 8 par 4, le quotient est 2, après lequel je pose les deux zero qui sont après 8, & la division est achevée; car ce quotient 2, valant le quart de 8, puisque 8 vaut 800, ce 2 doit valoir 200. Or pour marquer que 2 est dans le même rang que 8, il faut mettre après lui un égal nombre de zero. *Mais si le dividende ne peut pas être exactement divisé par le diviseur qui est au-dessous, il n'y a qu'à continuer l'operation, avançant le diviseur, ainsi qu'on l'a enseigné aux articles 6°. & 7°.*

800 — 4 — 00 } 200

9°. *Lorsque*

9°. *Lorſque le diviſeur eſt* 1 *avec pluſieurs zero, & qu'il y a des zero après le nombre à diviſer, il faut retrancher autant de zero du nombre à diviſer, qu'il y en a dans le diviſeur, & la diviſion ſera achevée.*

EXEMPLE. Le nombre donné pour être diviſé eſt 5000, le diviſeur 10: pour faire cette diviſion je retranche du nombre à diviſer 5000, autant de zero qu'il y en a au diviſeur, ſavoir un zero; ainſi le quotient ſera 500. En diviſant 5000 par 10, on cherche un nombre contenu 10 fois dans 5000, qui ſoit par conſéquent 10 fois plus petit que 5000; or pour faire valoir 5000 dix fois moins, il ne faut que faire venir 5 dans un rang plus avancé vers la droite: il eſt dans le quatrieme rang où il vaut mille, il faut le faire venir dans le rang des centaines, ce qui ſe fait en retranchant un zero, après lequel retranchement il n'eſt plus que dans le troiſieme rang. $\frac{5000}{10..}\Big\} 500$

Exemple de Diviſion. Soit ce nombre 2142178 donné pour être diviſé par cet autre nombre 352.

1°. Je place 3, dernier chiffre du diviſeur 352, non ſous 2, dernier chiffre du nombre à diviſer, mais ſous 1 qui le précede, puiſque 352 n'eſt pas contenu une fois dans 214.

2°. Je vois combien 3 eſt contenu dans 21, il y eſt contenu 7 fois: mais parce que j'apperçois que tout le diviſeur 352 n'eſt pas contenu 7 fois dans 2142, je ne prends que 6 pour quotient; & afin de vérifier ma diviſion, je multiplie le diviſeur entier par ce quotient, diſant $\frac{2142178}{352}\Big\} 6$

ſant 6 fois 3 font 18; de 21 ôtant 18, il reſte 3, ce que je marque: 6 fois 2 font 30, de 34 ôtant 30, il reſte 4: 6 fois 2 font 12, de 42 ôtant 12, il reſte 30; ainſi il me reſte 30178 à diviſer par 352.

On peut dans les commencemens, pour éviter la confuſion, récrire à part ce reſte 30178 *en ſuppoſant toujours qu'il y a déja un chiffre au quotient.*

3°. Je fais avancer mon diviſeur, comme il a été enſeigné. Or 352 eſt un nombre plus grand que 301, qui eſt le nombre de deſſus: Donc, ſelon ce qui a été dit ci-deſſus, je poſe un zero au quotient. $\left.\begin{matrix}30178\\352\end{matrix}\right\}$ 60

4°. Je fais avancer mon diviſeur. Or 3 eſt contenu dix fois dans 30, cependant je ne prends que 8 pour quotient, parce que 9 ſeroit trop grand. Je vérifie mon operation, multipliant le diviſeur par ce quotient 8, & diſant 8 fois 3 font 24, que j'ôte de 30; il reſte 6, que je marque: 8 fois 5 font 40: de 61 ôtant 40, il reſte 21, & multipliant 2 par 8, le produit eſt 16, lequel je retranche de 217, il reſte 201, & tout le reſte du nombre à diviſer eſt 2018. $\left.\begin{matrix}2\\301\\30178\\352\end{matrix}\right\}$ 608

19 *Ceux qui commencent ne peuvent voir tout d'un coup le juſte quotient qu'il faut prendre; comme ici, où il reſte à diviſer* 30178 *par le diviſeur donné* 352. *Après qu'on a écrit ce diviſeur ſous le dividende, on ne voit pas tout d'un coup pourquoi* 3 *étant* 10 *fois dans* 30, *on ne doit pas prendre* 9 *pour quotient. On conſeille donc à ceux qui commencent de prendre d'abord le plus haut quotient, comme ici* 9, *&* $\frac{30178}{352}$

en-

ensuite multiplier à part par ce nombre 9, le diviseur 352; ce qui produit 3168, lequel nombre étant plus grand que 3017 sous lequel est 352, on voit que 352 n'y est pas 9 fois. On prend donc un plus petit quotient, savoir 8. Et pour savoir si l'on ne se trompe point encore, il faut multiplier 352 par 8; ce qui fait 2816. Ce nombre est plus petit que 3017. L'on voit donc que 352 y est 8 fois, mais avec reste. En faisant de la sorte ces operations à part, on ne brouille point les chiffres. Cette pratique est bonne pour ceux qui commencent. Elle est même utile & presque nécessaire à tout le monde, lors que le diviseur & le dividende ont plusieurs chiffres; & on ne perd pas grand tems, car de quelque maniere qu'on fasse, il faut faire les mêmes multiplications, puisque pour vérifier si le quotient est juste, il le faut multiplier par le diviseur. Après cet Avertissement, qui ne sera pas inutile, reprenons la question présente, pour la terminer.

352 × 9 = 3168

352 × 8 = 2816

5°. Je fais avancer mon diviseur. Or 3 est contenu 6 fois dans 20, cependant je ne marque que 5 au quotient, 5 fois 3 font 15: de 20 ôtant 15, il reste 5 fois 5 font 25: de 51 ôtant 25, il reste 26: 5 fois 2 font 10: de 268 ôtant 10, il reste 258.

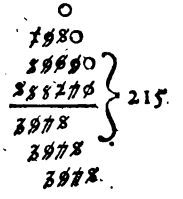
25
58
2678
352
} 6085

Ainsi je connois que 352 est contenu 6085 fois dans 2142178 avec reste, savoir 258; ce qui se marque ainsi 6085 $\frac{258}{352}$, comme il a été dit.

AUTRE EXEMPLE, dans lequel on fait la soustraction comme ci-dessus n. 13.

Il faut diviser 855270 par 3978. Ayant disposé les chiffres à l'ordinaire, ce que je fais ici de particulier, c'est qu'après avoir connu

que le diviseur est 2 fois dans le dividende, je commence à le multiplier par le côté droit, & je soustrais le produit à la maniere qui a été enseignée *sup.* n. 13.



Ainsi commençant de droit à gauche, je dis deux fois 8 font 16, que j'ôte des nombres de dessus 52; j'emprunte deux dixaines & je dis, qui de 22 paye 16 reste 6, que j'écris sur 2; & je retiens en ma mémoire 2 que j'ai emprunté; car je ne change point le chiffre 5, & je dis, 2 fois 7 font 14, qui avec deux que j'ai conservé en ma memoire font 16. J'emprunte encore 2 du rang suivant, & je dis, qui de 25 ôte 16 reste 9 que j'écris sur 5, & je retiens en ma mémoire 2; puis je dis 2 fois 9 font 18, & 2 que j'ai emprunté font 20. J'emprunte encore 2, & je dis, qui de 25 paye 20 reste 5, & je retiens 2. J'écris 5 dessus, & je dis 2 fois 3 font 6, & 2 que j'ai retenu font 8 que je soustrais de 8, & ne reste rien. J'avance mon diviseur à l'ordinaire, & je poursuis la division selon la même méthode, dans laquelle il n'y a pas un si grand nombre de chiffres à changer, que dans la premiere.

La

La division du même nombre 855270 par 3978, faite selon la premiere méthode, se réduit à cette forme que vous voyez. Il y a bien plus de changement, que lors qu'on fait la même operation selon la seconde méthode.

855270
215

AUTRE MANIERE DE FAIRE LA DIVISION.

1°. *Le diviseur se met à côté du dividende, au-dessus d'une petite ligne, en la maniere que vous le voyez. Si on vouloit par exemple diviser* 24 *par* 2, *on écrit*

24 | 2

2°. *On met un point sous le premier chiffre du dividende, en commençant de la gauche à la droite, c'est-à-dire sous* 2 *dans l'exemple proposé, ainsi*

24 | 2
.

3°. *S'il y avoit plusieurs chiffres dans le diviseur, il faudroit mettre autant de points sous le dividende. Si par exemple je divisois* 24 *par* 12, *je mettrois un point sous* 2, *& un second sous* 4; *parce qu'il y a deux chiffres dans le diviseur.*

24 | 12
.

4°. *Je regarde combien de fois le diviseur est contenu dans les chiffres sous lesquels j'ai marqué des points, comme dans le premier exemple combien de fois* 2, *qui est le diviseur, est contenu de fois dans* 2 *premier chiffre du dividende, sous lequel j'ai marqué un point. Je trouve qu'il y est une fois: Je marque* 1 *pour quotient sous le diviseur. En même tems je multiplie le quotient par le diviseur, disant:* 1 *fois* 2 *fait* 2 *que j'ôte du premier chiffre du dividende, & il ne reste rien. J'écris un zero au-dessous du point, qui étoit sous le premier chiffre du dividende.*

24 | 2
. 1

24 | 2
0 1

Je viens au ſecond chiffre du dividende, en commençant de la gauche à la droite, & je mets un point deſſous ce nombre qui eſt ici 4, & ſous le point j'écris 4, & deſſous ce 4 encore un point, comme vous voyez. Enſuite je conſidere combien de fois le diviſeur 2 eſt en 4: il y eſt 2 fois. J'écris 2 au quotient, puis multipliant le diviſeur par ce quotient 2, je dis, 2 fois 2 font 4. J'ôte ce produit 4 du chiffre du dividende, ſous lequel j'ai mis le dernier point, diſant, de 4 ôtant 4, il ne reſte rien; j'écris donc un zero. Je trouve ainſi que 2 eſt 12 fois dans 24.

24	2
04	12
0	

60. *S'il y avoit pluſieurs chiffres dans le dividende, il faudroit proceder de la même maniere. Par exemple, ſi au-lieu de 24 pour dividende, il y avoit 242, il faudroit mettre un troiſieme point ſous le troiſieme chiffre qui eſt 2, & écrire ce 2 à côté du zero, qui eſt au-deſſous de 4, & mettre encore un point au-deſſous. Enſuite il faut voir combien le diviſeur 2 eſt contenu dans ce dernier chiffre du dividende; il y eſt une fois: J'écris donc 1 au quotient à côté des chiffres déja trouvez; après je multiplie le diviſeur 2 par 1, j'ôte le produit de cette multiplication du dernier chiffre du dividende, il ne reſte rien; ainſi j'écris ſous ce même chiffre un zero.*

242	2
04	121
02	
0	

7°. *La multiplication & la ſouſtraction ſe font de la droite à la gauche: il n'y a pas eu occaſion de le faire dans l'exemple propoſé, parce que le diviſeur étoit ſimple. C'eſt particulierement lorſque les diviſeurs ſont compoſez, que la facilité de cette methode paroît. Elle ne charge point la mémoire; parce que faiſant la ſouſtraction, on emprunte autant de dixaines que l'on en a beſoin. Par exem-*

ple,

ple, ſoient 358 *à diviſer par* 39, *je trouve pour quotient* 9, *par lequel je multiplie le diviſeur de la droite à la gauche, & je le ſouſtrais de même, diſant,* 9 *fois* 9 *ſont* 81. *Il n'y a au dividende que* 8, *& enſuite un* 5, *qui ne ſont que* 58. *Sans m'embaraſſer de cela, j'emprunte* 8 *dixaines dont j'ai beſoin, & je dis,* 81 *de* 88 *reſte* 7, *que j'écris au-deſſous de* 8 *du dividende, & je retiens* 8. *Enſuite j'acheve la multiplication du diviſeur par le quotient* 9, *diſant,* 9 *fois* 3 *ſont* 27, *& 8 que j'ai retenu ſont* 35, *qui ôtez du dividende reſte zero; & ainſi je trouve que* 358 *diviſé par* 39, *le quotient eſt* 9 *plus* $\frac{7}{39}$.

358	39
07	7
	9
	39

80. *Cette operation tient moins de place. Comme on n'eſt point obligé d'effacer les caracteres, quand il y a quelque erreur, on la remarque facilement. Si c'eſt dans la premiere diviſion qu'on s'eſt trompé, on trouve ſon erreur dans le rang des chiffres qui eſt immédiatement au-deſſous du dividende. Si c'eſt dans la ſeconde diviſion partiale, on la trouve dans le rang ſuivant.*

PROPOSITION SIXIEME.

THEOREME SECOND.

Le quotient d'une diviſion étant multiplié par le diviſeur, ou le diviſeur par le quotient (ce qui eſt une même choſe,) fait une ſomme égale au nombre qui a été diviſé. 24

Soit 24 diviſé par 6: le quotient de cette diviſion eſt 4, qui eſt une ſixieme partie de 24; étant donc pris autant de fois qu'il y a d'unitez dans le diviſeur 6, c'eſt-à-dire 6 fois, il doit être égal à ſon tout 24, les parties priſes enſemble égalant leur tout; donc le quotient d'une diviſion étant

multiplié par le diviſeur, fait une ſomme égale au nombre qui a été diviſé : ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

22 *La multiplication & la diviſion ſe ſervent de preuves réciproquement.*

Car je ſuis aſſuré que 6 produit 24 étant multiplié par 4, ſi 6 eſt contenu 4 fois dans 24, ce que je puis ſavoir en diviſant 24 par 6 ; & au contraire, je ſuis aſſuré qu'ayant diviſé 24 par 6, le quotient eſt certainement 4, ſi 4 eſt une ſixieme partie de 24, ce que je puis ſavoir en multipliant le quotient 4 par 6; car ſi 4 multiplié par 6 fait 24, certainement 4 eſt une ſixieme partie de 24.

Suivant cette Règle, ſi je veux m'aſſurer que le quotient de la diviſion de 24096 diviſé par 48 eſt 502, je multiplie le diviſeur 48 par le quotient 502 ; ſi le produit de cette multiplication eſt égal à 24096, je ſuis aſſuré que l'operation eſt bien faite : au contraire, ſi je voulois ſavoir certainement ſi 48 multipliant 502 fait véritablement 24096 par 48, ſi le quotient de cette diviſion ſe trouvoit être 502, je ne pourrois plus douter de la certitude de cette operation.

AVERTISSEMENT.

23 *POur multiplier & diviſer avec facilité, il faut apprendre par mémoire le produit des multiplians des neuf premiers caracteres : Par exemple, combien fait 5 fois 7 ; combien fait 6, multiplié par 6; & en même tems combien de fois un des neuf premiers élémens eſt contenu dans un nombre donné d'un ou de deux chiffres, par exemple, combien 6 eſt dans 36, combien 5 dans 40.*

On dreſſe pour cela une Table, qui peut aider ceux.

ceux qui commencent. Dans les deux rangs des cellules AB, & AC, ſont les neuf premiers élemens & le nombre 10.

Lors qu'on veut ſavoir quel eſt le produit d'un chiffre, par exemple de 6 *multiplié par* 7, *il faut chercher dans l'un des deux rangs l'un de ces deux chiffres; par exemple, dans le rang AC, le nombre* 6, *& l'autre nombre* 7 *dans le rang AB; après cela prenant en cette Table une troiſieme cellule, qui réponde à celle où eſt* 6 *dans le rang AC, & à celle où eſt* 7 *dans le rang AB, on y trouve* 42, *qui eſt le produit de* 6 *multiplié par* 7.

Si je veux ſavoir combien 6 *eſt dans* 42, *je cherche* 6 *dans le rang AC, & une cellule qui réponde à* 6, *où ſont* 42; *après je cherche dans le rang AB, la cellule qui réponde à celle où eſt* 42, *où je trouve* 7, *ainſi je ſai que* 6 *eſt* 7 *fois dans* 42.

Mais ſi je veux ſavoir combien 6 *eſt dans* 45, *je cherche* 6 *dans le rang AB; & dans le rang qui eſt au-deſſous de* 6 *parallele à AC, je trouve* 42 *& puis* 48, *dont l'un eſt plus petit & l'autre plus grand que celui que je cherche. Ce qui me fait connoitre que* 6 *n'eſt pas contenu préciſément un certain nombre de fois dans* 45, *mais qu'il y eſt avec reſte; partant je laiſſe* 48 *qui excede, & m'attachant uniquement à* 42 *qui eſt moindre, je remarque que la difference de* 42 *à* 45 *eſt* 3. *Ce que ſachant, je cherche dans le rang AC, une cellule qui réponde à* 42; *j'y trouve* 7: *Et par là je ſai que* 6 *eſt* 7 *fois dans* 45 *avec reſte, ſavoir* 3. *Et ainſi des autres.*

TABLE

De Multiplication & de Diviſion.

A B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

C

24 *On donne des règles pour faire ces multiplications & ces diviſions, mais elles ſont plus curieuſes qu'utiles. Ces opérations ſe peuvent faire ſans elles, c'eſt pour cela que nous les omettons; car, comme nous l'avons remarqué, l'art n'eſt néceſſaire que pour les grandes operations.*

SEC-

SECTION TROISIEME.

DES QUATRE OPERATIONS DE L'ARITHMETIQUE, AJOUTER, SOUSTRAIRE, MULTIPLIER ET DIVISER,

Sur des Grandeurs marquées avec les Lettres de l'Alphabet.

CHAPITRE PREMIER.

L'Arithmetique avec des Lettres, eſt ce qu'on appelle l'Algebre. Elle s'applique aux Grandeurs poſitives & négatives. Ce que c'eſt que ces Grandeurs.

NOus avons dit qu'on pouvoit marquer des Grandeurs avec d'autres ſignes qu'avec des chiffres, ſavoir avec les Lettres de l'Alphabet. Il faut donc voir comment on peut faire les quatre operations de l'Arithmetique, en ſe ſervant de Lettres. Il dépend des hommes d'établir, pour ſigne d'une choſe, tout caractere qu'ils voudront choiſir. Celui-ci 7 ſignifie 7, parce qu'on eſt convenu qu'il ſignifieroit ſept; ce qu'on auroit pu marquer par tout autre caractere. J'apperçois donc que l'on peut marquer les operations de l'Arithmetique de la maniere qu'on le voudra. 25

On

On a établi que ce signe +, qui est une ligne coupée par une autre ligne, signifieroit *plus*, & qu'une simple ligne couchée comme celle-ci, — signifieroit *moins*. Ajouter une Grandeur à une autre, c'est prendre l'une avec l'autre, ou dire *l'une plus l'autre*. Ainsi on est convenu que pour ajouter ensemble deux grandeurs marquées avec des lettres, on joindroit avec + qui signifie *plus*, les lettres qui marquent ces grandeurs. Que par exemple pour ajouter la grandeur a avec la grandeur b, on écriroit $a + b$.

Soustraire une grandeur d'une autre, c'est prendre celle-ci *moins* la premiere. Quand on dit *six pieds moins quatre pieds*, on dit qu'on a soustrait quatre pieds de six pieds. Il n'est donc question pour marquer la soustraction d'une grandeur marquée par lettres, d'une autre grandeur aussi marquée par lettres, que de joindre leurs lettres avec — qui signifie *moins*. Si la premiere est a, dont on veut retrancher b; en écrivant $a - b$, on marque qu'on a retranché b de a, car cela veut dire a moins b.

Cela ne doit faire aucune difficulté. Les signes, comme on vient de le dire, sont des choses arbitraires, il n'est question que de prendre garde à ce qu'on veut qu'ils signifient. Ainsi étant convenu une fois que pour marque qu'on conçoit une grandeur multipliée par une autre, on joindra sans autre signe les deux lettres qui marquent ces grandeurs, pour multiplier b une grandeur par d une autre grandeur, je ne fais que les unir de cette sorte, bd, sans autre signe, ou je mets entre deux une petite croix de S. André. Ainsi $A \times B$ marque que A est multiplié par B, que c'est le produit de ces deux grandeurs multipliées l'une par l'autre.

Pour marque de la division on met sous la let-

tre,

tre, qui est le signe d'une grandeur, la lettre de la seconde grandeur, par laquelle on conçoit que la premiere est divisée. Ainsi quand on voit $\frac{b}{a}$ il faut concevoir que la grandeur *b* est divisée par *a*.

Cette maniere de faire les operations de l'Arithmetique est ce qu'on appelle l'*Algebre*, c'est-à-dire une Arithmetique plus parfaite; ce qu'on prétend que signifie ce nom dans la Langue des Arabes. On employe l'Algebre pour trouver des grandeurs inconnues, qu'on ne peut pas exprimer par des nombres, pendant qu'on ignore leur valeur. Aussi il faut que de tout tems ceux qui ont travaillé sur les Mathématiques, ayent eu une espece d'Algebre, c'est-à-dire des notes pour marquer les grandeurs qu'ils tâchoient de découvrir. Nous ne savons pas quelles étoient ces notes dans les premiers tems. Depuis que l'Algebre a été plus connue, qu'on en a fait des Livres, il paroît que d'abord on n'a eu des signes que pour les grandeurs inconnues; pour les autres, on les marquoit avec les chiffres ou nombres ordinaires. On appelloit *Nombres cossiques*, ceux de l'Algebre. Ce mot vient de l'Italien *cosa*, c'est-à-dire *chose*; parce que c'étoit la chose même qu'on prétendoit faire considerer par le moyen de ces notes. Et c'est dans ce même sens que l'Algebre se nomme aujourd'hui *Spécieuse*; parce que ce sont les *especes*, ou formes des choses mêmes, qu'on désigne par lettres.

Nous parlerons des anciennes notes dans la suite. Elles étoient embarassantes, confuses & mêlées avec les chiffres; c'est ce qui avoit donné cette prévention, que l'Algebre étoit extrêmement difficile. Depuis qu'on s'y sert des lettres de l'Alphabet, elle n'a rien que d'aisé. J'avoue que d'abord on a peine à

se

se faire à ce calcul. Les lettres sont des signes fort généraux, qui n'ont point d'idées particulieres qui appliquent. Elles marquent les grandeurs dont elles sont les signes d'une maniere abstraite, au lieu que les chiffres ont des idées particulieres & distinctes; car aussi-tôt que je vois par exemple ces deux chiffres 12, *je me represente* 12 *choses égales ou douze parties de la grandeur dont il est question. Ceux qui ne sont pas accoutumez au calcul par lettres, quand ils ne voyent que des lettres, il leur semble qu'ils ne voyent rien.*

Cependant l'utilité du calcul par lettres est manifeste. On ne peut appliquer des chiffres qu'à des grandeurs connues. Je ne puis point nommer des grandeurs données, l'une, par exemple 7, *l'autre* 8, *que je ne sache précisément leur rapport ou leur valeur. Lors qu'il s'agit donc de connoitre des grandeurs inconnues, & que de la maniere qu'on en propose une question, on apperçoit qu'en les ajoutant ou retranchant l'une de l'autre, les multipliant l'une par l'autre ou les divisant, on découvrira quelque rapport qui fera connoitre le reste, il est nécessaire de faire sur elles les quatre operations; ce que je ne puis faire avec les chiffres, sans connoitre leur juste valeur, que je cherche encore; au lieu que je puis désigner une grandeur en la marquant avec une lettre, quoique je ne connoisse point sa valeur, parce que les lettres ne déterminent rien. Si j'appelle* x *une certaine grandeur que je me propose de trouver; ce signe dont je me sers pour la marquer ne dit point qu'elle ait* 10, *ou* 20, *ou* 30 *pieds, ou autres parties que ce soit. Je puis marquer indifferemment par cette lettre* x, *toute sorte de grandeurs. Il est vrai qu'ayant déja employé cette lettre pour marquer une telle grandeur, je ne puis pas, dans une même question, me servir de cette même lettre pour signifier des gran-*

grandeurs que je sai ne lui être pas égales, à moins que je n'y ajoute ou que je n'en retranche quelque autre grandeur qui en fait la difference.

Un des avantages de ce calcul c'est que les mêmes signes, c'est à dire les mêmes lettres, demeurent. Quand j'ajoute b *avec* d *écrivant* b + d, *ou que je multiplie* b & d, *écrivant* bd, *ces mêmes lettres* b *par* d *demeurent toujours; l'operation que je fais sur elles ne les change point: ainsi dans l'examen d'une question où il y a une longue suite d'operations, je vois toujours le chemin que j'ai fait, & tous les rapports des grandeurs sur lesquelles j'opere, parce qu'elles conservent leurs signes. Cela n'arrive pas dans les chiffres; car si j'ajoute* 5 *avec* 6 *il vient* 11, *où* 5 & 6 *ne paroissent plus. Si je multiplie* 3 *par* 9, *je fais* 27, *où* 3 & 9 *ne paroissent plus.*

C'est ce qui doit encourager à surmonter la difficulté qui paroît dans ce calcul. Je dis qui paroît, car dans le fond le calcul par lettres est plus facile que celui des chiffres. Ce j'en ai dit, est plus facile que tout ce qu'on en peut dire. Ce que je vais ajouter n'est que pour faire faire attention aux suites de cette maniere, que j'ai proposée, de marquer les quatre operations avec des lettres. Vous allez voir combien cela est facile; ce qui vous surprendra, après l'idée que vous aviez conçue de l'Algebre. Cette science étoit autrefois inaccessible. L'obstacle venoit des signes embarrassans dont on se servoit. Les signes qu'on employe aujourd'hui ne sont que les lettres de l'Alphabet, auxquelles on est accoutumé; & ces signes + & − & =, *par le moyen desquels on s'exprime d'une maniere vive, courte & claire, sans presque employer de paroles. Dans l'espace de deux lignes on dit ce qu'on ne feroit pas, sans ce secours, dans une page entiere, employant des paroles à l'ordinaire. On le verra dans la suite.*

Un

26 Un des avantages de l'Arithmetique par lettres, ou de l'Algebre, c'eſt qu'elle s'applique à ce qu'on appelle les grandeurs négatives, comme à celles qui ſont poſitives. *Poſitif* & *réel* eſt une même choſe. Cent piſtoles qu'un homme poſſede, c'eſt une grandeur réelle, ou poſitive. Mais on peut dire de celui qui n'a rien, & qui doit cent piſtoles, qu'il a un bien négatif; c'eſt-à-dire qu'il s'en faut cent piſtoles qu'il ſoit dans la condition d'un homme qui n'a rien, mais qui ne doit rien. Ainſi ſi on nomme x ſon état, on l'exprimera ainſi $x = 0 - 100$, ou $x + 100 = 0$; c'eſt-à-dire, qu'afin que ſon bien fût égal à rien, il faudroit qu'il acquît cent piſtoles.

Comme ce qui eſt au-deſſus du zero eſt une grandeur poſitive; ce qui deſcend au deſſous eſt une grandeur négative; ce qu'on peut concevoir dans cet autre exemple. Si M eſt le commencement d'un chemin vers X, tout ce que fait un Voyageur vers X eſt comme une grandeur poſitive. Mais ſi A eſt diametralement oppoſé à X, tout ce que fait ce Voyageur de M vers A, en s'éloignant de X eſt une négation: cela s'appelle *moins*: comme ce qu'il fait au-delà de M vers X, en s'approchant de X, ſe doit nommer *plus*. Ce moins eſt une négation ou une grandeur négative, dont $-$ eſt le ſigne; comme $+$ eſt celui d'une grandeur poſitive. Par-tout où l'on ne voit aucun de ces deux ſignes, il faut y ſuppoſer le ſigne $+$; car ce n'eſt preſque que de ce qui eſt poſitif qu'on parle.

Une grandeur étant infiniment petite, on peut ſans erreur ſenſible, la ſuppoſer égale à zero. Ainſi ayant nommé x une grandeur, & la conſiderant dans ſon commencement, comme par exemple le premier point d'une ligne, on peut dire que ſon premier degré eſt zero, ou x^0. C'eſt

ainſi

ainſi qu'on marque l'état où elle ſe peut ſuppoſer égale à rien x^0. Mais proprement ſon premier degré eſt x^1, quand elle s'éleve, & qu'elle commence d'être quelque choſe. On peut donc regarder le zero comme un milieu entre la grandeur négative, & la poſitive. Toute grandeur poſitive ſe fait par une addition au néant. Une ligne commence par un point, qui dans ſon premier commencement eſt comme rien ; car par ce commencement on entend une choſe indiviſible, & qui ſe peut conſiderer comme un néant, tant elle eſt petite. Ces conſiderations donnent lieu de parler des grandeurs d'une maniere fort étendue, qui comprend l'infini auſſi-bien en deſcendant qu'en montant. Car comme une grandeur peut s'augmenter à l'infini poſitivement, auſſi par la ſouſtraction on peut la diminuer à l'infini, non ſeulement en la ſubdiviſant & faiſant que de plus en plus elle approche du néant ou du zero ; mais encore, deſcendant au-deſſous du zero infiniment. Les ſignes + & − donnent le moyen d'exprimer tout cela. On peut avec le ſigne − retrancher d'un plus petit terme un autre terme, quoique plus grand, ce qu'on ne pourroit autrement : ôter, par exemple 8 de 5 ; car on peut dire 5−8 : comme ſi un homme qui n'a que cinq piſtoles en devoit 8, ſon bien ſeroit 5−8 ; car d'un côté il a cinq piſtoles, & de l'autre il en doit 8. Ainſi ces ſignes ſont d'un uſage fort étendu.

Il faut encore conſiderer ici que les grandeurs poſitives & négatives étant oppoſées, en augmentant les unes on diminue les autres ; & qu'ainſi pour ſouſtraire d'une grandeur négative ou la diminuer, il n'y a qu'à augmenter la grandeur poſitive oppoſée, comme nous l'allons voir.

CHA-

CHAPITRE II.

Moyen de faire les quatre premieres operations de l'Arithmetique sur les Grandeurs qu'on marque avec une seule lettre, qu'on appelle pour cette raison Grandeurs incomplexes, *ou* simples.

DE L'ADDITION.

27 ON peut concevoir une grandeur comme faite ou composée de deux grandeurs; ainsi, si l'on veut marquer cette composition, il faut employer deux lettres: comme par exemple, concevoir qu'une certaine grandeur a deux parties b & d, j'appelle cette grandeur $b + d$, ce qui me la fait nommer *Grandeur complexe* ou *composée*; au lieu que j'appelle une grandeur que je marque avec une seule lettre, *Grandeur incomplexe* ou *simple*. Ce sont des termes qu'on invente pour éviter les circonlocutions.

Ajouter, comme on l'a dit, c'est joindre deux grandeurs ensemble, ou exprimer par un signe qu'on a joint ces deux grandeurs. Ainsi il n'est question, pour ajouter la grandeur b avec la grandeur d, que de les joindre par le signe de cette jonction qui est $+$, écrivant $b + d$, ce qui vaut autant que b plus d. Il n'est donc question que de se servir des signes des quatre operations qu'on a expliquées, les exprimant comme on en est convenu. Il ne faut pas confondre ces signes ou expressions; car si pour ajouter b avec d on joignoit de près ces deux lettres sans autres signes, ainsi $b\,d$, puisqu'on est convenu que cette maniere $b\,d$ est le signe de la multiplication, on ne marqueroit pas que b est joint avec d, mais qu'on a multiplié b par d, ce qui est bien different: car 2 ajoutez à six font 8; mais deux fois six font douze.

On

On peut abreger ces ſignes ; & il le faut, quand on le peut ; car il en eſt des ſignes comme des expreſſions, qui donnent des idées plus nettes lors qu'elles ſont ſimples. Ainſi $b+b+b+b$ ſignifiant que b eſt ajouté quatre fois, au lieu de cette longue expreſſion j'écris $4b$; ce qui eſt la même choſe.

Souvenez-vous qu'on eſt convenu, (car les ſignes ne ſignifient que ce qu'on convient qu'ils ſignifieront) que lorsque le chiffre eſt devant la lettre il marque une addition : ici par exemple dans $4b$, que b eſt ajouté quatre fois à lui-même ; mais b^4 marque, comme on le dira, que b eſt multiplié quatre fois par lui-même. Afin qu'on ne s'y trompe pas, on fait enſorte que le chiffre qui eſt après la lettre, ne ſe trouve pas exactement dans la même ligne, comme vous voyez ici b^4. On peut mettre le ſigne $+$ devant une lettre qui n'a point de ſigne, quand on ſait d'ailleurs que la grandeur qu'elle marque eſt poſitive. Ainſi dans cette expreſſion $b+d$, je puis mettre $+$ devant b ; $+b+d$.

Exemples d'Additions.

à ajouter	a	$3f$	$4d$	a	$3c$	xb	$2b$
	b	$2f$	x	$2b$	$4d$	zc	b
	c		$3d$			$2c$	$3b$
Sommes	$a+b+c$	$5f$	$12d+x$	$a+2b$	$3c+4d$	$xb+2zc$	$6b$

De la Souſtraction.

Comme le ſigne $+$ convient à une grandeur poſitive ; auſſi le ſigne $-$ marque une grandeur négative, ou qui eſt moindre que rien. Ce ſigne $-$ eſt celui de la Souſtraction. Pour ſouſtraire g de f on joint ces deux grandeurs par ce ſigne de *moins*, en cette maniere $f-g$. Ainſi la ſouſtraction dans l'Algebre ou l'Arithmetique par

par lettres, change en grandeurs négatives celles qui étoient positives. On sousentend le signe +, quand il n'y a aucun signe. Ainsi quand on propose d'ôter g de f; c'est comme si on proposoit d'ôter $+g$ de $+f$. Or en changeant le signe de la grandeur qu'on veut ôter, vient $+f-g$; où la grandeur positive $+g$ devient négative: de sorte que si ces lettres marquent l'état d'un homme qui a ou qui n'a pas des pistoles, $+f$ marquera le nombre des pistoles qu'il a positivement; & $-g$ le nombre de celles qui lui manquent ou qu'il doit. Plus une grandeur, moins la même grandeur, ce n'est rien. Ces deux signes + & − se détruisent; c'est pourquoi on peut abreger une operation, & en rendre l'expression plus nette, effaçant autant de fois les lettres qui marquent la grandeur dont on veut retrancher, que ces lettres se trouvent de fois dans celle qu'on veut retrancher: ainsi pour retrancher $2b$ de $5b$, il faut ôter de $5b$ deux fois b, le reste $3b$ est ce que l'on cherche. Car $+2b-2b$ ce n'est rien.

EXEMPLES DE SOUSTRACTIONS.

D'où il faut	$5b$	$4d$	f	b	$3c$	ab
soustraire	$2b$	d	f	d	$2b$	cd
Reste	$3b$	$3d$	0	$b-d$	$3c-2b$	$ab-cd$

Remarquez que la soustraction d'une grandeur négative, d'une autre grandeur négative, se fait par une addition. Nous avons vu que les grandeurs négatives & positives étant opposées; en diminuant les unes, on augmente les autres. En diminuant les dettes d'un homme, on augmente son bien.

De la Multiplication.

POur la Multiplication on joint ſimplement les grandeurs que l'on veut multiplier l'une par l'autre. Pour multiplier b par d, on écrit bd. Pour multiplier b par 3, on écrit $3b$. S'il y a des chiffres joints avec les lettres, on les multiplie comme il a été enſeigné; ainſi pour multiplier $3b$ par $2b$, on multiplie 3 par 2, ce qui fait 6, & on joint b avec b, le produit de cette multiplication eſt $6bb$. Il ne faut point chercher de démonſtration de toutes ces choſes-là. Ces manieres d'ajoûter, ſouſtraire, multiplier & diviſer toutes ſortes de grandeurs, ne ſont que des ſignes de ce que l'on ſuppoſe être fait: ainſi ſi j'écris bb, je témoigne par cette marque que je ſuppoſe que la grandeur déſignée par la lettre b a été multipliée par b, c'eſt-à-dire par elle-même. On a dit qu'on ſe ſervoit quelquefois d'une petite croix de S. André pour ſigne de la multiplication: que $A \times B$ eſt une note qui marque que A & B ſont multipliez l'un par l'autre.

Pour abreger, lors qu'on multiplie une grandeur par elle-même, on met après la lettre qui la marque, un chiffre qui ſignifie combien de fois elle a été multipliée: ainſi multipliant b par b, cela fait bb, & derechef par b, cela fait bbb; pour abreger on écrit b^3. Remarquez donc encore une fois que $3b$ n'eſt pas la même choſe que b^3; car ſi b vaut 2, en diſant 3 fois b on dit 3 fois 2, ce qui fait 6. Mais puiſque b^3 eſt la même choſe que bbb, vous voyez que bbb doit valoir 8; car 2 par 2 fait 4, & 4 par 2 fait 8. Quand on écrit $2b$, c'eſt une marque que l'on ſuppoſe que b eſt ajoûté à b, mais quand on écrit bb ou b^2, c'eſt une marque qu'on ſuppoſé que b eſt multiplié par b. 3 ajouté à 3 ne fait que 6; mais 3 multiplié par 3 fait 9.

EXEMPLES DE MULTIPLICATIONS.

A multiplier.	a	a	b	ab	aa
Multiplicateur.	b	a	$2b$	cd	ab
Produit.	ab	aa ou a^2	$2bb$	$abcd$	a^3b ou $aaab$

A multiplier.	$2a$	$2b$	$3ab$	$6a^3$
Multiplicateur.	$3b$	c	$2cd$	$2a^3$
Produit.	$6ab$	$2bc$	$6abcd$	$12a^6$

Dans le dernier exemple $6a^3$, multiplié par $2a^3$, on sera surpris comment le produit en est $12a^6$. Nous avons dit que a^3 est la même chose que aaa; or en multipliant $6aaa$ par $2aaa$, le produit est $12aaaaaa$; partant pour abreger, comme il a été dit, au-lieu de $aaaaaa$, on doit mettre un 6 après a, qui marque combien on doit concevoir que cette lettre est repetée.

DE LA DIVISION.

30 LA marque de la division est une petite ligne, au dessous de laquelle on place le diviseur, & au-dessus la grandeur donnée pour être divisée: ainsi $\frac{b}{c}$ est une marque qu'on suppose que b est divisé par c.

Nous avons déja remarqué qu'il étoit utile de rendre les expressions les plus simples qu'on le pouvoit; parce qu'elles donnent des idées plus simples, & par conséquent plus nettes. Or il est facile d'abreger l'operation dont il est

ici

ici question. Avant que d'en proposer le moyen, il faut relire ou rappeller dans sa mémoire la Proposition sixieme, *sup.* n. 21. On y a démontré que le quotient d'une division multipliant le diviseur, produit la somme qui avoit été divisée; ainsi le quotient doit être une grandeur qui multipliée par le diviseur, produise la grandeur qu'il faut diviser; par conséquent *bc* étant proposé pour être divisé par *c*, il est manifeste que le quotient sera *b*; car *b* multipliant le diviseur *c*, fait la somme *bc*, qui avoit été divisée. La division défait ce qu'avoit fait la multiplication. On donne donc cette Règle générale, pour faire les divisions, qu'il faut retrancher des grandeurs à diviser les lettres qui se trouvent dans le diviseur. Suivant cette Règle, pour diviser *bcd*, par *cd*, il faut retrancher de *bcd* les lettres *c* & *d* qui se trouvent dans le diviseur *cd*, & dans la grandeur à diviser *bcd*. Le quotient sera donc *b*, comme il est évident, puisque multipliant par ce quotient *b* le diviseur *cd*, cela fait *bcd*, qui est la grandeur qui a été proposée pour être divisée.

Lorsqu'il y a des chiffres on les divise, comme il a été enseigné dans la division des nombres. Pour diviser $6bb$ par $3b$, on divise bb par b; le quotient est b, & 6 par 3, le quotient est 2; ainsi le quotient de $6bb$, divisé par $3b$, est $2b$. Car $2b$ multipliant $3b$, produit $6bb$.

EXEMPLE DE DIVISIONS.

Dans toutes ces divisions, pour être assuré

que l'operation eſt bonne, il ne faut que multiplier le quotient par le diviſeur; ſi le produit eſt égal au dividende, ſelon ce qu'on a dit touchant la preuve des diviſions avec les chiffres, cette diviſion par lettres ſera bonne.

Il eſt évident qu'en diviſant une grandeur par elle-même; le quotient eſt 1, diviſant b par b le quotient eſt 1; car une grandeur eſt contenue une fois en elle-même.

CHAPITRE III.

Operations de l'Arithmetique ſur les Grandeurs complexes ou compoſées.

DE L'ADDITION.

31 L'Addition des Grandeurs complexes ou compoſées, n'a pas plus de difficulté que celle des Grandeurs incomplexes; il faut ſeulement joindre par le ſigne $+$ les Grandeurs que l'on veut ajouter les unes aux autres. Par exemple, pour ajouter $b+c$ avec $f+g$, il faut joindre ces deux Grandeurs complexes par le ſigne $+$ en cette maniere, $b+c+f+g$. Pour ajouter $b+c$ avec $d-f$, il faut écrire $b+c+d-f$.

Pour abreger, lors qu'à une grandeur on ajoute la même grandeur, on met un chiffre qui marque combien de fois on ſuppoſe que cette grandeur eſt ajoutée à elle-même, comme on a fait ci-deſſus: ainſi ayant à ajouter $c+d$ avec $c+d$, au-lieu de $c+d+c+d$, on fait cette addition en cette ſorte $2c+2d$. Si les Grandeurs données ſont $c-d$ & $c-d$, on fait l'addition de la même maniere $2c-2d$.

Lors que les Grandeurs qu'on doit ajouter ſont les mêmes, & qu'elles ont des ſignes contrai-

traires, il faut retrancher les lettres qui ſe trouvent d'une part avec le ſigne +, & de l'autre part avec le ſigne —; comme s'il falloit ajouter $3b+2d$, à $2b-2d$, puiſque dans la premiere grandeur il ſe trouve $+2d$, & dans l'autre $-2d$, je retranche $2d$, qui ſe trouve d'une part avec +, & de l'autre avec —; ainſi la ſomme de cette addition eſt $5b$. La raiſon pourquoi on ſupprime entierement $2d$ eſt manifeſte; car le ſigne — détruit ce que fait le ſigne +, ainſi il ne reſte rien. Plus $2d$ & moins $2d$, ne ſont rien. En ôtant tout ce qu'on avoit mis, il ne reſte rien.

Nous en avons fait un Axiome qu'il faut avoir préſent à l'eſprit, pour abreger ces operations, en rendre les expreſſions plus nettes, & pour juger des operations que d'autres ont fait. Car il arrive ſouvent qu'on ne conçoit pas la vérité d'une operation, parce qu'on n'y voit point de certaines lettres qu'on juge y devoir paroître, lors qu'on n'apperçoit pas que ſe trouvant avec des ſignes contraires on a dû les ſupprimer.

Par exemple, ajoutant $4f+6g$ à $3f-4g$, l'addition ſera $7f+2g$; car $+6g$ eſt égal à $+4g+2g$: or ſelon ce qu'on vient de dire, ajoutant $+4g+2g$ avec $-4g$, il faut entierement ſupprimer $4g$; ainſi il ne reſte que $+2g$.

EXEMPLE D'ADDITIONS.

A ajouter.	$a+3b$	$2a-b$	$aa-5a+6$
	$a+2b$	$3a-3b$	$aa+a-6$
Somme	$2a+5b$	$5a-4b$	$2aa-4a$

A ajouter.	$a - d$	$aa + 2a - 3$	$2a^3 + b^2 - 3$
	$a + 4d$	$aa + a - 6$	$a^3 + b^2 - 2$
Somme	$2a + 3d$	$2aa + 3a - 9$	$3a^3 + 2b^2 +$

A ajouter.	$3a + 4b - 6c$	$20m + 10n + 40x$	
	$4a - 2b - 3c$	$1m - 30n - 20x$	
	$7a + 12b + 2c$	$40m + 9n + 10x$	
Somme	$14a + 14b - 7c$	$61m - 11n + 70x$	

De la Soustraction.

32 IL faut ici, comme dans la Soustraction des Grandeurs incomplexes, se servir du signe de la Soustraction, joignant par le signe — la grandeur qu'on veut soustraire, avec celle de laquelle on la veut soustraire. Pour ôter $b + d$ de $c + f$, il faut premierement écrire $c + f - b$: & parce que ce n'est pas seulement b qu'il faut retrancher, mais encore $+ d$, on doit marquer ces deux soustractions par deux signes de soustraction, en cette maniere $c + f - b - d$.

On l'a déja remarqué, & il est aisé de voir que par la soustraction on change les grandeurs qu'on retranche, & que de positives qu'elles étoient, on fait qu'elles deviennent négatives. C'est pourquoi on donne cette Règle générale, qu'il faut changer les signes de la grandeur qu'on veut soustraire. Vous vous souvenez que nous avons dit, que devant une grandeur qui n'est précedée d'aucun signe, celui-ci $+$ y peut être sous-entendu. Suivant cette Règle, pour soustraire $b + d$, ou $+ b + d$ de $c + f$, il faut changer les deux signes de $+ b + d$ en cette maniere $c + f - b - d$, comme il a été dit.

Cette

Cette Règle ſe trouve toujours veritable; car lors que le ſigne — ſe rencontre dans la grandeur qu'on veut ſouſtraire, comme ici ſi on veut ſouſtraire $b - d$ ou $+b-d$ de $c+f$, il faut changer ces ſignes $+b-d$ en des ſignes contraires, de cette ſorte $c+f-b+d$. Quand on ſouſtrait $b-d$ de $c+f$, on ne veut pas ôter entierement la grandeur b, il s'en faut la grandeur d; ainſi ayant mis $c+f-b$, on retranche de $c+f$ plus qu'il ne faut retrancher, ſavoir la grandeur d; c'eſt pourquoi on l'ajoute lui donnant le ſigne $+$ en cette maniere $c+f-b+d$. Selon cette Règle, ayant ſouſtrait $b-d$ de $c-f$, le reſte eſt $c-f-b+d$.

On peut abreger les expreſſions d'une ſouſtraction, en obſervant deux choſes dont nous avons déja parlé. 1°. Lors qu'il faut ajouter des grandeurs exprimées par les mêmes lettres, il ſuffit de mettre devant une de ces lettres un chiffre qui marque combien elle eſt ajoutée de fois à elle-même, comme au lieu de $b+b+b+2b$ on peut mettre $5b$. 2. Puiſque $+$ une grandeur $-$ la même grandeur, cela ne fait rien, $+b-b$ égal à zero, on peut ſans diminuer la valeur d'une expreſſion, ſupprimer les lettres qui ſe trouvent avec le ſigne $+$ & avec le ſigne $-$; par conſequent ôtant $+c+f$ de $c+d+f$, comme cela fait $c+d+f-c-f$, en retranchant les lettres c & f qui ont des ſignes contraires, le reſte de cette ſouſtraction eſt d.

Si l'on ſouſtrait $a-b$ de $3a+b$, ſelon la Règle générale après la ſouſtraction il reſte $3a+b-a+b$. Or on peut abreger cette expreſſion; car $3a-a$ ne font que $2a$, & $+b+b$ valent $2b$; ainſi $2a+2b$ valent autant que $3a+b-a+b$.

En retranchant $a+3b$ de $3a+2b$, selon la Règle, le reste sera $3a+2b-a-3b$. Mais puisque $3a-a$ est égal à $2a$, & que $+2b-3b$ est égal à $-b$, il est évident que $3a+2b-a-3b$ sont $2a-b$.

Pour soustraire $3a-3b$ de $5a-4b$, selon la Règle générale, le reste sera $5a-4b-3a+3b$. Or 1°, $5a-3a$ est égal à $2a$; 2°, d'une part on ôte $4b$, & de l'autre on ajoute $3b$, comme vous le voyez dans l'operation $5a-4b-3a+3b$: ainsi il faut supprimer $3b$, & n'en marquer qu'un avec le signe $-$ pour abreger cette expression, qui sera réduite à celle-ci $2a-b$. Soit donné $5a+2b$ dont il faut soustraire $4a+6b$, je retranche premierement $4a$ de $5a$, & il reste a: Ensuite pour retrancher $6b$ de $2b$, comme on ne peut pas ôter d'une grandeur ce qu'elle n'a pas, après avoir supprimé $2b$ pour retrancher les $4b$ qui restent, je les retranche de la grandeur a en les liant avec cette lettre en cette maniere $a-4b$.

Exemple de Soustractions.

D'où il faut	$2a+5b$	$5a-4b$	$3+2b$
soustraire	$a+b$	$3a-3b$	$a+3b$
Reste	$a+4b$	$2a-b$	$2a-b$

D'où il faut	$2a+b$	$3a+d$	$2aa+3a+9$
soustraire	$a-b$	$2a+5d$	$aa+2a+3$
Reste	$a+2b$	$a-4d$	$aa+a+6$

D'où il faut	$25a+12b-14d$	$30m-19n+50x+10y$		
soustraire	$12a-8b+10d$	$20m-12n+14x+20y$		
Reste	$13a+20b-24d$	$10m-7n+36x-10y$		

Si dans ces dernieres operations vous n'apper-

percevez pas comment ces ſouſtractions donnent de tels reſtes, faites les operations tout au long, & vous découvrirez ſans peine, comment en abregeant une expreſſion ſelon qu'il a été enſeigné, ces ſouſtractions ont les reſtes qui ſont marquez dans les Exemples propoſez.

L'Addition & la Souſtraction ſe ſervent de preuves. Pour m'aſſurer qu'ayant retranché $a + 6b$ de $5a + 2b$, le reſte eſt $4a - 4b$; j'ajoute $4a - 4b$ avec $a + 6b$, & trouvant que la ſomme eſt $5a + 2b$, je ſuis aſſuré que l'operation eſt bonne. Au contraire, pour m'aſſurer que $5a + 2b$ eſt la ſomme de $4a - 4b$, & $a + 6b$, je retranche l'une de $5a + 2b$; ſi le reſte de la ſouſtraction donne l'autre ſomme, l'addition a été bien faite, comme on l'a enſeigné ci-deſſus.

Diſons encore que pour ajouter enſemble deux grandeurs complexes, il n'y a qu'à les écrire l'une après l'autre avec leurs mêmes ſignes; & que pour ſouſtraire une grandeur complexe d'une grandeur auſſi complexe, il faut écrire la grandeur à ſouſtraire après l'autre, en changeant tous les ſignes de celle que l'on ſouſtrait, & réduire le tout dans l'une & l'autre operation à la plus ſimple expreſſion. Par exemple, ſi l'on veut ajouter $3a + 4c - 5b + 8$ *avec* $4a - 2c - 2b + 4$, *l'on écrira* $3a + 4c - 5b + 8 + 4a - 2c - 2b + 4$: *ce qui ſe réduit à* $7a + 2c - 7b + 12$.

De même ſi l'on veut ſouſtraire $3a + 4c - 5b + 8$ *de* $4a - 2c - 2b + 4$, *l'on écrira tout de ſuite* $4a - 2c - 2b + 4 - 3a - 4c + 5b - 8$: *ce qui ſe réduit à* $a - 6c + 3b - 4$. *Il n'eſt point néceſſaire en ces operations d'écrire les termes ſemblables ſous les ſemblables: lorſqu'on le fait, ce n'eſt que pour repréſenter aux yeux ces operations.*

De la Multiplication.

33 La multiplication des grandeurs complexes se fait presque de la même maniere que la multiplication des nombres qui ont plusieurs chiffres. Comme dans les nombres on multiplie tous les chiffres du nombre à multiplier par chaque chiffre du multipliant, en sorte qu'il y a autant de multiplications partiales qu'il y a de chiffres dans le multipliant; aussi dans les grandeurs composées on multiplie toutes les parties de la grandeur à multiplier par chaque partie de la grandeur qui est la multipliante.

Soit donné $b+d$ pour être multiplié par x; il faut multiplier b & d, qui sont les parties de la grandeur donnée, par x; ce qui produit $xb+xd$.

Soit donné $b+d$ pour être multiplié par $x+z$, il faut faire quatre multiplications partiales, qui feront $xb+xd+zb+zd$. On peut comprendre dans trois Règles tous les differens cas de cette operation.

Premiere Regle.

34 Lorsque les deux grandeurs données ont le signe +, leur produit doit avoir ce même signe: ainsi multipliant $b+d$ par $x+z$, le produit est, comme nous avons vu, $xb+xd+zb+zd$.

Seconde Regle.

35 Plus en moins ou moins en plus, donne un produit qui doit avoir le signe —.

C'est-à-dire que si l'une des deux grandeurs a le signe —, par exemple, si l'on avoit donné $b-c$ pour être multiplié par $+a$, le produit de leur multiplication doit être $ab-ac$, dont la raison est évidente. Quand on multiplie $b-c$ par a, on ne veut multiplier qu'une partie de b. Ainsi ayant

ayant multiplié tout b par a, comme on a trop fait, ayant auſſi multiplié c qui doit être retranché de b; pour y remedier, on ôte autant de fois c qu'on l'avoit trop pris de fois. Le produit ab étant plus grand que celui qui eſt le véritable, de toute la grandeur ac: on en retranche donc cette grandeur, en la joignant avec ab par le ſigne de la ſouſtraction qui eſt —, en cette maniere $ab-ac$.

Soit donné $b+d$ pour être multiplié par $x-z$, le produit ſera $xb+xd-zb-zd$. Quand on multiplie $b+d$ par $x-z$, on ne multiplie pas cette grandeur par toute la grandeur x, il s'en faut la partie z; ainſi ayant multiplié la grandeur $b+d$ par toute la grandeur de x, le produit $xb+xd$ eſt plus grand que le véritable produit qu'on cherche, de la grandeur b multipliée par z, & de d multipliée par z, c'eſt-à-dire de $zb+zd$: ainſi il faut retrancher ce produit $zb+zd$, de la maniere qu'il a été enſeigné dans la ſouſtraction, écrivant $xb+xd-zb-zd$.

Troisieme Regle.

Moins en moins donne plus.

C'eſt-à-dire que ſi les deux grandeurs qu'on 36
multiplie ont le ſigne —, le produit de la multiplication de l'une par l'autre, aura le ſigne +. Par exemple, $b-d$ étant multiplié par $x-z$, le produit ſera $xb-xd-zb+zd$. Et afin qu'on comprenne cela, voici comme ſe fait l'operation. Je multiplie d'abord $b-d$ par x, & premierement b, ce qui me donne xb pour premiere multiplication partiale. Et comme je ne voulois pas multiplier toute la grandeur b par la grandeur x, qu'il s'en falloit la grandeur d; le produit xb eſt trop grand, ſavoir de xd. Je retranche donc xd de xb, par le ſigne de la ſous-

traction en cette sorte $xb-xd$; & ainsi j'ai déja le produit des deux grandeurs à multiplier, par une des grandeurs du multipliant, savoir de $b-d$ par x. Reste encore à connoitre le produit de $b-d$ par z. Mais si vous avez bien pris garde, en multipliant $b-d$ par x, vous l'avez aussi multiplié par z, ce qu'il ne falloit pas faire; car vous n'aviez pas à multiplier $b-d$ par toute la grandeur x, il s'en falloit la grandeur z: partant le produit de $b-d$ par x est trop grand, savoir du produit de $b-d$ par z qui est $zb-zd$: c'est pourquoi aussi je le retranche de $xb-xd$, en changeant les signes, suivant qu'il a été enseigné dans la soustraction. Ce qui me donne pour total & véritable produit $xb-xd-zb+zd$.

Ainsi pour comprendre la raison de cette Règle de multiplication: Moins en moins donne plus; *il n'y a qu'à se former une juste idée de la multiplication, & se souvenir de ce qui a été dit dans la soustraction sup.* n. 32. *sans y chercher d'autre mystere; car avec ce signe* plus, *on ajoute seulement ce qu'on avoit ôté de trop.*

Voici une autre preuve que $+$ *par* $-$ *donne* $-$, 37 *& que* $-$ *par* $-$ *donne plus. On la peut passer dans la premiere lecture de cet Ouvrage; elle s'entendra plus facilement, quand on sera exercé à ce calcul.*

Soit à multiplier a$-$b *par* $+$ c, *je dis, que le produit sera* ac$-$bc; *car soit* a$-$b $=$ d *donc* a $=$ d$+$b. *Ce qui étant multiplié par* $+$ c *donne* ac $=$ dc$+$bc. *Donc* ac$-$bc $=$ dc, *& ac*$-$bc *est le produit de* a$-$b *par* $+$ c: *ce qu'il falloit démontrer.*

Soit encore a$-$b *à multiplier par* $-$ c, *il faut prouver que le produit est* $-$ ac $+$ bc. *L'on fait comme devant* a$-$b $=$ d, *ou* a $=$ d$+$b; *puisque*

que par la démonſtration précédente + *par* − *donne* −, *en multipliant* a = d + b *par* − c, *on aura* − ac = − dc − bc, *ou* − ac + bc = − dc. *Ainſi* a − b *multiplié par* − c *donne le produit* − ac + bc : *ce qu'il falloit démontrer.*

EXEMPLE POUR LA MULTIPLICATION.

Premier.

$$\begin{array}{rl} & 4a+12b+8f \\ \text{par} & 5a-3b+4f \\ \hline & 20aa+60ab+40af-36bb-24bf+32ff \\ & \quad -12ab+16af \qquad +48bf \\ \hline & 20aa+48ab+56af-36bb+24bf+32ff \end{array}$$

AUTRE EXEMPLE.

$$\begin{array}{rl} & 8x-4n-20x \\ \text{par} & 4x-2n-40x \\ \hline & 32xx-16xn-80nx+8nn+400x+800xx \\ & \quad -16xn-320nx \qquad +160nx \\ \hline & 32xx-32xn-403nx+8nn+200nx+800xx \end{array}$$

Comment on peut rendre les expreſſions de ces multiplications plus nettes

Lorsque les grandeurs qu'on multiplie les 38
unes par les autres ont les mêmes lettres, on peut abreger l'expreſſion de leur produit. Le produit de $a+b$ par $a-b$, eſt ſelon la règle $aa+ab-ab-bb$: or puiſque $+ab-ab$ ne fait rien, donc $aa-bb$ eſt égal à $aa+ab-ab-bb$. Le produit de $a-b$ par $a-b$ eſt $aa-ab-ab+bb$, puiſque $-ab-ab$ eſt la même choſe que $-2ab$, je mets donc $aa-2ab+bb$ pour $aa-ab-aa+bb$.

Le produit de $3d+e$ par $3d+e$ eſt $9dd+6de+ee$. Celui de $3d+e$ par $3d-e$, eſt $9dd-ee$. Celui-ci de $3d-e$ par $3d-e$, eſt $9dd-6de+ee$. Lorsque les grandeurs ſont fort

composées, & que leurs produits seroient trop étendus, pour marquer seulement qu'il faut multiplier ces grandeurs composées l'une par l'autre, ou les joint, mettant entre deux cette petite croix de S. André ×, comme on l'a dit $4a+3aa-2a+1 \times aa-5a+6$.

De la Division.

39 LA Division, comme nous avons déja remarqué, défait ce que la multiplication avoit composé; ainsi pour diviser, il faut se ressouvenir des Règles précédentes de la multiplication.

Nous avons vu que la division & la multiplication se servent de preuves. On ne se peut pas tromper dans la division, pourvu qu'on observe si le quotient en multipliant le diviseur fait un produit égal à la grandeur qu'on a divisée; car comme on l'a vu *sup.* n. 21. si cela arrive, ce quotient est le véritable: ainsi $x+z$ multiplié par $b+d$, faisant le produit $xb+xd+zb+zd$, il est certain que $b+d$ est le quotient de $xb+xd+zb+zd$ divisé par $x+z$. Il ne faut donc que suivre les trois Règles que nous venons de donner pour la multiplication.

1°. Puisque plus en plus donne plus, si la grandeur qui doit être divisée a le signe +, & que le diviseur ait le signe +, c'est une marque que le quotient doit avoir +; ainsi la grandeur $xb+xd+zb+zd$ étant donnée pour être divisée par $x+z$, il est manifeste que le quotient est $b+d$.

2°. Si la grandeur à diviser a le signe −, & que le diviseur ait le signe +, le quotient aura le signe −; & si le diviseur a le signe −, le quotient aura le signe +. Ainsi divisant xb

$+xd$

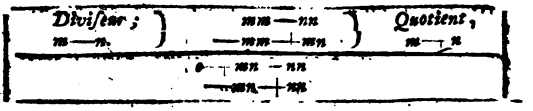
$+xd-zb-zd$ par $x-z$, le quotient sera $b+d$; car $b+d$ multipliant $x-z$, fait la grandeur donnée $xb+xd-zb-zd$.

3°. Si la grandeur donnée à diviser a le signe $+$, & le diviseur le signe $-$, le quotient aura ce même signe $-$. Divisant $xb-xd-zb+zd$ par $x-z$, le quotient sera $b-d$.

Lorsque l'expression d'une operation a été abregée, pour en appercevoir le quotient, ou quels sont les termes supprimez dans les produits à diviser, & les rétablir; voici ce que l'on fait.

Soit $mm-nn$ à diviser par $m-n$, il faut écrire le diviseur à la gauche du dividende, comme vous le voyez.

Produit à diviser.



Je dis mm divisé par $+m$ donne $+m$; que j'écris au quotient. Or $m-n$ multiplié par m donne $+mm-mn$, que j'écris au-dessous de toute la grandeur à diviser, avec des signes contraires $-mn+mn$, comme vous voyez; & réduisant l'on a $o+mn-nn$, qu'il faut encore diviser par $m-n$. Je dis donc encore $+mn$ divisé par m donne $+n$, que j'écris au quotient, & $m-n$ multiplié par n, donne $mn-nn$, qui étant écrit avec des signes contraires, détruit entierement le produit à diviser $o+mn-nn$: Ainsi je suis assuré que $m+n$ est le quotient de $mm-nn$, divisé par $m-n$. Lorsque dans la grandeur à diviser on ne trouve aucune des lettres du diviseur, c'est une marque qu'on ne peut

peut faire cette diviſion qu'en plaçant au-deſſus d'une petite ligne la grandeur à diviſer, & le diviſeur au-deſſous : ainſi diviſant $bd+pq$ par $r+s$ le quotient ſera $\frac{bd-pq}{r+s}$.

Je ne donne pas davantage d'exemples de toutes ces operations, parce que je veux que mon Ouvrage ſoit court. Je ne mets que des exemples faciles, écrivant pour ceux qui commençent, & qui peut-être n'auront point de Maitres pour les aider. S'ils entendent mon Livre, ils ſeront capables d'entendre ſans peine les Livres où l'on trouve des exemples de calculs par lettres plus longs & plus difficiles que ceux que je propoſe. Pour les Maitres qui voudront bien ſe ſervir de cet Ouvrage, ils doivent exercer leurs Diſciples, en leur donnant pluſieurs exemples.

Si on a bien compris ceux que je viens de donner, ce qu'on aura pu faire avèc une legere attention, on concevra aiſément tout l'artifice de ces operations ; & de ſoi-même, on appercevra ce qu'il faudroit faire lorsque les grandeurs ſont encore plus compoſées.

C'eſt à Deſcartes que nous devons cette Arithmetique par lettres, comme on la pratique aujourd'hui, & que je viens de l'enſeigner. François Schooten l'ayant expliquée à Eraſme Bartholin, celui-ci l'a miſe par écrit, & en a compoſé un Livre, qui porte pour titre ; Mathématique Univerſelle, ou Introduction à la Géometrie de Deſcartes. *Je renvoye à ce Livre comme à la ſource, en ce qui regarde le calcul par lettres ; on y trouvera grand nombre d'exemples qui donneront lieu de s'exercer, & de ſe perfectionner dans ce calcul.*

ELE-

ELEMENS
DES
MATHEMATIQUES,
OU
TRAITÉ
DE LA GRANDEUR
EN GENERAL.

LIVRE SECOND.

SECTION PREMIERE.

Des differentes Puiſſances auxquelles on peut élever une Grandeur, ſelon qu'on l'augmente par l'Addition, ou par la Multiplication.

CHAPITRE PREMIER.

Ce que c'eſt que Puiſſance *d'une Grandeur.*

NOus avons vu que les premieres propriétez de la Grandeur, c'eſt qu'à une Grandeur on en peut ajouter une autre, ou en retrancher les Grandeurs qui ſont plus petites; qu'on la peut multiplier par une autre Grandeur; & qu'enfin elle peut être diviſée dans les parties qu'elle contient.

Lors

Lorsqu'on traite un ſujet, il ne s'agit pas toujours de rechercher des proprietez fort cachées. Il faut conſiderer celles qui ſont les plus ſimples, & que l'idée ou notion naturelle du ſujet préſente à l'eſprit. Il y a une merveilleuſe ſimplicité dans toute la Nature: les premiers principes de toutes choſes ſont ſimples; & ce qui rend la recherche des Sciences difficile, c'eſt qu'on ne commence pas par les premiers principes, qu'on ne les ſuit pas; ou qu'on ne tire pas des premieres connoiſſances tout ce qu'on en peut déduire. La ſimplicité des premieres connoiſſances fait qu'on les mépriſe.

Evitons ce défaut; & avant que de rechercher d'autres proprietez de la Grandeur que celles que nous avons déja conſiderées, voyons ſi celles dont nous avons parlé ne peuvent point encore ſuffire pour nous faire comprendre bien des choſes qui paroiſſent de grands myſteres. Tout ce qu'il y a au monde ne ſe fait que par addition, & multiplication de parties. Selon que les élémens ſont ajoutez, ſont multipliez, & ſont combinez ou joints les uns avec les autres, ils compoſent differens Etres. Selon auſſi qu'on ajoute les grandeurs, qu'on les multiplie, qu'on les combine, on produit differentes eſpeces de grandeurs.

L'uſage autoriſé par ceux qui écrivent ſur les Mathématiques, nomme *Puiſſance* ce qu'une grandeur peut devenir, ſelon qu'elle eſt multipliée, & ce ſont particulierement les differentes manieres de multiplier une grandeur qui en font les differentes eſpeces, qu'on appelle Puiſſances. Ainſi il eſt évident, que puiſque nous devons encore nous arrêter ici à conſiderer les premieres proprietez de la Grandeur,

la

la méthode veut que nous parlions ici des Puiſſances, & en même tems de leur réſolution ; c'eſt-à-dire, que nous examinions comment on peut élever une grandeur à un certain degré de puiſſance, en la multipliant de telle & telle maniere ; & comment, lors qu'une grandeur d'une telle puiſſance eſt donnée, on peut par la diviſion la décompoſer, pour ainſi dire, & la réſoudre dans les premieres parties dont elle a été compoſée.

CHAPITRE II.

Explication ou définition des termes dont on ſe doit ſervir, & des differentes Puiſſances auxquelles une Grandeur peut être élevée.

I.

UNe Grandeur qui eſt faite par la multiplication de deux ou de pluſieurs Grandeurs, s'appelle une Grandeur de pluſieurs dimenſions. 1

Ainſi la grandeur qui eſt marquée par ce ſigne *bc*, eſt une grandeur de deux dimenſions; car ce ſigne veut dire que *b* a été multiplié par *c*. La grandeur *bcd* eſt de trois dimenſions ; car elle eſt faite de la multiplication de ces trois grandeurs *b*, *c*, *d*.

II.

On appelle proprement Puiſſance *ce qu'une grandeur devient, lors qu'on la multiplie une, ou pluſieurs fois par elle-même.* 2

Quoi qu'une grandeur, ſelon qu'elle eſt multipliée non ſeulement par elle-même, mais encore par toute autre grandeur, faſſe differentes eſpeces de grandeurs, néanmoins parce que celles qui ſe font par une même multiplication réitérée, ſont plus conſidera-

bles,

bles, on n'appelle *Puiſſance* d'une grandeur, que ce qu'elle peut devenir quand elle eſt multipliée une ou pluſieurs fois par elle-même: & parce que, comme je le viens de dire, ces grandeurs ſont les plus conſiderables; c'eſt pour cette raiſon que ce ſecond Livre porte pour titre *Des Puiſſances*, quoiqu'on y traite encore des autres grandeurs qui reçoivent differens noms, ſelon qu'elles ſont ajoutées ou multipliées.

III.

3 *On appelle premiere Puiſſance, deuxieme Puiſſance, troiſieme Puiſſance, &c, un certain nombre de multiplications réiterées de la même Grandeur. Ces Puiſſances ſe nomment auſſi Degrez, & les chiffres qui marquent ces Puiſſances ſont les expoſans de ces Puiſſances.*

Ainſi, la premiere Puiſſance de b, ou le premier Degré de b, c'eſt b même. La deuxieme Puiſſance ou ſecond Degré, c'eſt bb; c'eſt-à-dire b, multiplié par b. Nous avons vu L. 1. n. 29. que pour abreger, au-lieu de repeter pluſieurs fois une même lettre pour marque qu'elle a été multipliée par elle-même, on ne la marque qu'une fois, mais on y joint enſuite un petit chiffre qui marque combien de fois elle a été multipliée par elle-même. Au lieu de bb, on peut donc mettre b^2. La troiſieme Puiſſance ou le troiſieme Degré de b ſera bbb, ou b^3; la quatrieme $bbbb$, ou b^4; la cinquieme b^5, la ſixieme b^6; ainſi de ſuite à l'infini; & ces nombres 2, 3, 4, 5, 6, &c. ſont les expoſans de ces puiſſances.

4 Nous avons vu Liv. 1. n. 26. qu'une grandeur dans ſon premier commencement étant infiniment petite, peut être ſuppoſée égale à zero. Ainſi ſi on la nomme z, on peut dire que $z^0 =$ zero.

zero. Son premier degré ou premiere puiſſance étoit x^1 quand elle commence d'être une choſe ſenſible; ſon ſecond degré ou ſeconde puiſſance c'eſt x^2; ſon troiſieme degré x^3. Si x eſt une ligne, & qu'on la conſidere dans ſon premier point, lorſqu'elle n'eſt rien ou preſque rien, c'eſt-à-dire qu'elle n'a rien de ſenſible, on peut la nommer x^0. Quand elle eſt quelque choſe, que c'eſt une ſimple ligne, ce ſera x^1. Si on la conçoit diſpoſée avec elle-même, de ſorte qu'elle faſſe une figure qui ſoit un quarré, alors c'eſt x^2. Si on la conçoit s'élevant ſur ce même quarré, & formant comme un dez à jouer, c'eſt x^3.

Euclide, avec les anciens Mathématiciens, comparoient le point des Géometres (c'eſt-à-dire une grandeur qui n'a aucune dimenſion) avec l'unité: ce qu'ils ne devoient pas faire. C'eſt le *zero* de l'Arithmetique qui répond au *point* de la Géometrie; c'eſt cette erreur qui leur a fait appeller *premiere Puiſſance*, ce que nous appellons *ſeconde Puiſſance*. Ainſi bb eſt, ſelon eux, une premiere puiſſance, qui dans une maniere de parler plus juſte, & qui aujourd'hui eſt la plus uſitée, s'appelle une ſeconde Puiſſance. b^1 eſt la premiere, & bb ou b^2 eſt la ſeconde; ce qu'il faut obſerver pour diſtinguer l'ancien langage d'avec le nouveau.

IV.

Les Grandeurs, par la multiplication deſquelles une Grandeur de pluſieurs dimenſions a été produite, ſont nommées les Racines de cette Grandeur.

La grandeur bxz ayant été faite par la multiplication de ces trois grandeurs b, x, z, ces trois grandeurs ſont appellées les Racines de bxz. Ce nombre 24 eſt fait de 6 multiplié par 4. Ces

4. Ces deux nombres 6 & 4 ſont les racines de ce nombre 24.

V.

6 *On appelle Plane, ou de deux Dimenſions, une Grandeur qui eſt faite de deux Grandeurs, multipliées l'une par l'autre.*

La grandeur *bc* eſt une grandeur *plane* ou de deux dimenſions. Ce nombre 12 ſera un nombre plan ou de deux dimenſions, ſi on conçoit qu'il éſt fait de ces deux nombres 2 & 6 multipliez l'un par l'autre.

VI.

7 *Une Grandeur plane ou de deux dimenſions eſt dite quarrée, lorsque ſes deux racines ou ſes deux dimenſions ſont égales; ou, ce qui eſt la même choſe, lors qu'elle eſt faite d'une Grandeur multipliée par ſoi même.*

Ainſi *bb* eſt une grandeur *quarrée*, ou un *quarré*; les deux racines *b* & *b* étant égales. 16 eſt un nombre quarré, parce que ce nombre eſt fait de deux nombres égaux multipliez l'un par l'autre, ſavoir de 4 multiplié par 4, ou du même nombre 4 multiplié par lui-même, lequel nombre 4 eſt appellé la racine quarrée du nombre quarré 16.

VII.

8 *Le quarré eſt le ſecond degré ou la ſeconde puiſſance.*

Nous venons de dire que *bb* ou b^2 eſt une grandeur quarrée, que c'eſt le quarré de *b*: or *bb* eſt fait de *b* par *b* racines égales; ainſi *bb* ſecond degré ou ſeconde puiſſance eſt un quarré.

VIII.

9 *Une grandeur de trois dimenſions, ou qui eſt faite de la multiplication de trois racines, eſt appellée Solide.*

Ainſi *bcd*, qui a trois dimenſions, & qui eſt fait

fait par la multiplication des trois racines *b*, *c*, *d*, eſt une grandeur ſolide. Ce nombre 36 ſera appellé nombre Solide, ſi on conçoit qu'il eſt fait de ces trois membres 2, 6, 3. qui étant multipliez l'un par l'autre ſont 36.

IX.

Cube ou Grandeur cubique, eſt une Grandeur ſolide dont les trois racines ou dimenſions ſont égales; ou, ce qui eſt la même choſe, une Grandeur cubique eſt celle qui eſt faite premierement d'une même Grandeur multipliée par elle-même; & en ſecond lieu, de ce produit multipliié par cette même Grandeur. 10

Ainſi *bbb* eſt une grandeur cubique, ſes trois dimenſions ou racines *b*, *b*, *b*, étant égales. Ce nombre 27 ſe peut nommer cube, ſi on conſidere que 27 eſt fait de ces trois membres égaux 3, 3, 3, ou de ce ſeul nombre 3 multiplié premierement par lui-même, ce qui fait le nombre quarré 9, & enſuite de ce quarré multiplié par 3. On appelle ce nombre 3, Racine cubique de 27.

X.

Le Cube eſt la troiſieme Puiſſance. 11

Ainſi b^3 qui eſt la troiſieme puiſſance de *b*, eſt un cube, puiſque b^3 qui eſt la même choſe que *bbb*, eſt fait de trois racines égales.

XI.

Un Quarré de Quarré eſt une Grandeur qui a pour ſa racine une Grandeur quarrée; ou, ce qui eſt la même choſe, une grandeur qui eſt faite d'un Quarré multiplié par un Quarré. 12

Ainſi *bbbb* eſt une grandeur quarrée de quarré, car elle eſt faite de *bb* quarré, multiplié par le quarré *bb*. Ainſi comme un quarré a deux dimenſions, une grandeur quarrée de quarré a quatre dimenſions.

Ce

Ce nombre 16 peut être conſideré comme un nombre quarré de quarré, car la racine quarrée de 16 eſt 4, qui eſt un nombre quarré, dont la racine eſt 2, ainſi ce nombre 16 eſt fait d'un quarré, multiplié par un quarré, ſavoir de 4 par 4.

XII.

13 *Le Quarré de Quarré eſt la quatrieme Puiſſance.* b^4 eſt la quatrieme puiſſance. Or b^4 ou *bbbb* eſt fait de quatre racines égales, ou de *bb* quarré multiplié par *bb*; ce qui fait *bbbb*; par conſéquent b^4, ſelon la définition précédente, eſt un quarré de quarré.

XIII.

14 *Sur-ſolide, eſt une Grandeur faite d'un Quarré de Quarré multiplié par la premiere racine; ou, ce qui eſt la même choſe, c'eſt une Grandeur faite d'un cube multiplié par le quarré de ſa racine.*

Ainſi *bbbbb* eſt une grandeur qu'on appelle Sur-ſolide, parce qu'elle eſt faite de *bbbb* quarré de quarré, multiplié par ſa racine *b*, ou ſi l'on veut de *bbb* cube par *bb* quarré, ce qui donne b^5. De même 32 peut être appellé Sur-ſolide, ſi on conſidere que ce nombre eſt fait de 16 quarré de quarré multiplié par 2 premiere racine de ce quarré de quarré, ou du cube 8 multiplié par le quarré 4, dont la racine eſt 2.

XIV.

15 *Le Sur-ſolide a cinq dimenſions: ainſi c'eſt le cinquieme degré ou cinquieme puiſſance.*

La grandeur *bbbbb* ou b^5 eſt faite de cinq racines égales, ainſi c'eſt une cinquieme puiſſance; c'eſt auſſi un Sur-ſolide, puiſque c'eſt le produit de *bbbb* quarré de quarré par la racine *b*, comme nous venons de le voir. De même, ſelon ce que nous avons dit, le nombre 32 ne

peut

peut être conſidere comme étant un Sur-ſolide.

XV.

Un Quarré cube eſt une grandeur quarrée, qui 16
a pour ſa racine un cube.

Ainſi ce nombre 64 ſera un quarré cube, ſi on conçoit ce nombre 64 comme un quarré dont la racine eſt 8; car 8 par 8 fait 64. Or 8 ſera auſſi un cube, en le conſiderant fait de 2 multipliez 1o par lui-même, ce qui fait 4: & derechef 4 par 2, ce qui fait 8. Ainſi 64 ayant pour racine quarrée un cube, c'eſt un quarré cube.

XVI.

Le Quarré cube a ſix dimenſions; ainſi c'eſt la 17
ſixieme Puiſſance, ou ſixieme degré.

Car b^6 ou *bbbbbb* eſt un quarré fait de *bbb* par *bbb*, laquelle grandeur *bbb* eſt un cube.

Une grandeur eſt reconnue pour quarrée, non ſeulement quand elle eſt exprimée par deux mêmes lettres, comme bb, *mais auſſi quand on peut partager en deux parties égales les lettres qui compoſent cette grandeur, enſorte que les mêmes lettres ſe trouvent en l'une & l'autre partie: ainſi* bbccdd *eſt une grandeur quarrée, parce qu'elle peut ſe diviſer en* bcd, & bcd, *qui ſe multipliant font* bbccdd. *Il en eſt de même des grandeurs cubes.*

Le même nombre peut recevoir differens noms, ſelon que l'on veut concevoir qu'il eſt fait par telles & telles multiplications. 64 ſera appellé Plan, ſi on le conſidere fait de 32 multiplié par 2; Quarré, ſi on le veut concevoir fait de 8 multiplié par lui-même. Il peut auſſi être appellé Cube: car ce nombre 64 peut être fait de 4 multiplié par 4, ce qui fait 16, & de 16 multiplié par 4: ainſi il eſt cube par la définition des nombres cubes.

Quoiqu'une Grandeur ne ſoit exprimée que par une ſeule lettre, on peut la concevoir de tant de dimenſions qu'on voudra; mais pour marquer ces di-

menſions il faut joindre à cette lettre le chiffre 1, *autant qu'il le faudra; ce qu'il eſt néceſſaire de faire quand on veut comparer deux grandeurs, qui n'ont pas autant de lettres les unes que les autres: ainſi voulant comparer* x *avec* bb, *pour concevoir dans* x *deux dimenſions, comme* bb *en a deux, je place* 1 *devant* x *en cette ſorte* 1x. *Pour-lors* 1x *&* bb *ſont deux grandeurs planes: cependant* 1x *ne vaut pas davantage que* x, *car l'unité n'augmente point la grandeur qu'elle a multipliée.*

Prenez bien garde que toute grandeur quarrée n'eſt pas un nombre quarré. On appelle nombre quarré celui qui eſt fait de la multiplication d'un nombre par ſoi-même, comme 9 *eſt un nombre quarré qui eſt fait de* 3 *multiplié par* 3. *C'eſt pourquoi* 20 *n'eſt pas un nombre quarré; parce qu'aucun nombre multiplié par lui-même ne peut faire* 20. *Ainſi ſi je ſuppoſe que* 20 *eſt égal à* bb, *je pourrai bien appeller* bb *une grandeur quarrée, mais non pas un nombre quarré. Il en eſt de même des grandeurs cubes, &c.*

CHAPITRE III.

Maniere ancienne d'exprimer les Puiſſances. La nouvelle maniere eſt plus nette & plus aiſée.

18 C'Eſt particulierement dans l'expreſſion des puiſſances, que conſiſte ce qu'on appelle *l'Algebre*: ainſi ce ſont ces expreſſions qui font l'obſcurité ou la clarté de cette Science, ſelon qu'elles ſont plus embaraſſées ou plus ſimples. Voyons quelles étoient autrefois les expreſſions de l'Algebre.

Les anciens Mathématiciens ſe ſont ſervis de quelque eſpece d'Algebre, comme nous l'avons vu. On ne peut point exprimer avec les nombres une grandeur inconnuë; cependant pour

pour la trouver, il la faut marquer. Il n'eſt donc pas poſſible que ces Mathématiciens, qui ont découvert tant de choſes, n'ayent eu des ſymboles ou certains ſignes pour exprimer celles qu'ils cherchoient avant qu'ils les connuſſent. Nous ne ſavons pas quels étoient ces ſymboles. C'eſt la maniere ou la ſcience de ſe ſervir de ces ſymboles ou ſignes, pour marquer une choſe qu'on ne connoit point, qu'on appelle *Algebre*, & qui pour cela eſt nommée *Symbolique* ou *Spécieuſe*; parce que le ſigne dont elle ſe ſert préſente l'eſpece ou la ſorte de choſe dont il eſt queſtion. Les Italiens nomment *Coſa*, ce que nous appellons *Choſe:* ainſi ils appellent nombres *Coſſiques* les ſignes Algebraïques, qui repréſentent les choſes, comme nous l'avons déja remarqué. Or on ne ſe ſervoit autrefois de ces ſignes, que pour marquer les racines & les puiſſances.

Les Italiens regardoient la racine d'une grandeur comme la choſe même: ainſi *coſa* & *racine* ont la même ſignification chez eux. Ils ont nommé *Cenſo* ou *Zenzo*, c'eſt-à-dire *Revenu*, *Rente*, la puiſſance quarrée qui vient de ſa racine multipliée par elle-même. Pour marquer la *coſa* ou la *racine*, ils ſe ſervoient de la lettre *N*, ou de la lettre *R*. Pour marquer le quarré, ils employoient la lettre *Q*, par où commence ce mot *Quarré*, ou ils ſe ſervoient de la lettre *Z*, parce qu'ils nommoient *Zenzo* cette puiſſance. Ils ont ainſi marqué le cube avec un C, le quarré de quarré avec deux *QQ*, & avec *S* le ſurſolide. On voit dans leurs Livres d'Algebre d'autres caracteres fort bizarres, qui ſont faits des lettres italiques *r*, *z*, *c*, *ſ*, par où commencent ces noms, *racines*, *zenzo*, *cube*, *ſurſolide*.

On ne ſe ſert plus de ces ſignes, depuis qu'on a trouvé l'Arithmetique par lettres. On marque également avec elles les grandeurs connues & inconnues ; ainſi il n'y a plus cette confuſion de differens ſignes, de chiffres, & de ces nombres qu'on nommoit *Coſſiques*. Seulement on diſtingue les grandeurs inconnues en ſe ſervant pour les exprimer des derniers caracteres de l'Alphabet x, y, z. Pour les puiſſances, elles ſe marquent fort ſimplement, ajoutant à la lettre qui eſt le ſigne d'une grandeur, un petit chiffre qui indique le degré de ſa puiſſance. Ainſi x^1 eſt une racine, x^2 un quarré, x^3 un cube, x^4 une quatrieme puiſſance, x^5 une cinquieme, x^6 une ſixieme. Ce qu'on marquoit autrefois ainſi AR, AQ ou AZ, AC, AQQ, AS, AQC, ce qui veut dire racine A, ſon quarré, ſon cube, ſon quarré de quarré, le ſur-ſolide, le quarré cube. Nous n'avons pas beſoin de tous ces ſignes. Ceux dont nous nous ſervons ſont ſimples, & font un langage clair & abregé, comme on le voit dans cet exemple.

$$xx = bb + 2bd + dd,$$

ou

$$x^2 = b^2 + 2bd + d^2.$$

Cette expreſſion tient lieu des paroles ſuivantes : *Le quarré de la grandeur inconnue* x *eſt égal aux deux quarrez des grandeurs connues* b, *& de plus deux fois un plan fait des racines* b *&* d *de ces deux quarrez* bb *&* dd. Cette expreſſion ſi courte eſt vive : les choſes y ſont marquées clairement : on voit ce qu'elles ſont ; que xx eſt un quarré, que bd eſt un plan, & la marque de l'égalité $=$ montre qu'on ſuppoſe que xx eſt égal à $bb + 2bd + dd$.

CHA-

CHAPITRE IV.

De quelques autres eſpeces de Grandeurs que les differentes manieres d'ajouter & de multiplier produiſent.

COmme on peut multiplier en differentes manieres une grandeur, & l'ajouter à elle-même ou avec d'autres, les differentes eſpeces de grandeur que produiſent ces differences ſont infinies. Il ſuffit d'indiquer les plus conſiderables de ces eſpeces ; car je ne prétends pas épuiſer cette matiere, cela n'eſt pas poſſible. 19

On diſtingue les grandeurs numeriques, c'eſt-à-dire les grandeurs qui s'expriment avec des nombres, en pluſieurs ordres. Voilà les définitions qu'en donne Mr. Paſchal dans ſon Traité de l'Uſage du Triangle Arithmetique, où il explique leurs proprietez.

Il appelle nombres du premier ordre, les ſimples unitez. 1, 1, 1, 1, 1, 1, &c.

Nombres du ſecond ordre, les naturels qui ſe forment par les additions des unitez.

1, 2, 3, 4, 5, &c.

Il appelle nombres du troiſieme ordre, ceux qui ſe forment par l'addition des naturels. On nomme ceux-là Nombres Triangulaires.

1, 3, 6, 10, &c.

Dans cet ordre le ſecond terme, ſavoir 3, égale la ſomme des deux premiers naturels, qui ſont 1 & 2, le troiſieme qui eſt 6, égale la ſomme des trois premiers naturels 1, 2, 3, &c.

Nombres du quatrieme ordre ſont ceux qui ſe forment par l'addition des Triangulaires, qu'on appelle Pyramidaux.

1, 4, 10, 20, &c.

C'eſt-à-dire que le troiſieme des Pyramidaux,

daux, qui eſt 10, égale la ſomme des trois premiers Triangulaires, ſavoir de 1, 3, 6.

Les nombres du cinquieme ordre ſont ceux qui ſe forment par l'addition des Pyramidaux, auxquels on a donné le nom de Triangulo-triangulaires.

1, 5, 15, 35, &c.

Les nombres du ſixieme ordre ſont ceux qui ſe forment par l'addition des précédens.

1, 6, 21, 56, &c.

Et ainſi à l'infini.

Selon que les nombres continus ſe multiplient les uns les autres, ils ont differens noms. Les nombres continus ſont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, & les autres qui ſuivent. Or on diſtingue en differentes claſſes ces produits: par exemple, ceux qui ſeront produits de deux nombres qui ſe ſuivent, ſont la premiere claſſe; ainſi 20, qui eſt fait de 4 multiplié par 5, & 72 qui eſt fait de 8 multiplié par 9, ſont de la premiere claſſe ou premiere eſpece.

Les nombres qui ſont faits de la multiplication de trois nombres de ſuite qui ſe multiplient, ſont de la ſeconde eſpece; ainſi 120 qui eſt fait de la multiplication de ces trois nombres 4, 5, & 6, qui ſe ſuivent, & 720 qui eſt fait de ces trois nombres 8, 9, & 10, ſont de la ſeconde eſpece; ainſi de ſuite à l'infini: ce qui fait voir qu'on peut inventer une infinité de differentes eſpeces de nombres. Les premiers élémens d'une Science doivent être courts & faciles; il ne m'eſt donc pas permis de renfermer ici tout ce que je pourrois y faire entrer. Je rendrois ces élémens trop difficiles & trop longs, ſi j'entreprenois de parler de toutes ces eſpeces de grandeurs.

SEC-

SECTION SECONDE.

DE LA COMPOSITION ET DE LA NATURE DES PUISSANCES.

CHAPITRE PREMIER.

Axiomes ou Demandes touchant la compoſition & la nature des Puiſſances.

AXIOME PREMIER OU DEMANDE PREMIERE.

LE tout & toutes ſes parties étant multipliées par un même multiplicateur, les produits de ces multiplications ſont égaux. 20

$b + d$ ſont les parties de z. Cette propoſition dit, que ſi $b + d$ & z ſont multipliez par une même grandeur, comme par x, les produits ſeront égaux $bx + dx = zx$. Ce qui eſt évident: car puiſque le tout & toutes les parties priſes enſemble ne ſont qu'une même choſe, en multipliant le tout ou toutes les parties, on doit faire un même produit.

AXIOME SECOND OU DEMANDE SECONDE.

Multipliant deux grandeurs l'une par l'autre, dans quelque ordre qu'on le faſſe, elles feront un même produit. 21

Multipliant a par b, ſoit que l'on commence par a ou par b, on fait le même produit: ab eſt la même choſe que ba. Cette propoſition, comme on voit, ne peut pas s'accommo-

der aux chiffres ; il est vrai pourtant que 5 fois 6, & 6 fois 5, sont toujours 30 : mais ce n'est pas ce qu'on veut dire : il ne s'agit ici que de leur simple disposition ou maniere de les coucher sur le papier. Pour les lettres cette disposition est indifferente ; mais à l'égard des chiffres c'est ce qui en fait toute la valeur ; ainsi on ne la peut troubler ni changer ; 52 & 25 ne sont pas une même chose, comme *ab* & *ba*. Cet Axiome ne s'entend donc que des grandeurs en elles-mêmes, ou de leur expression par lettres.

AXIOME III. OU DEMANDE TROISIEME.

22. *Multipliant trois grandeurs l'une par l'autre dans quelque ordre qu'on le fasse, elles feront un même produit.*

Que l'on multiplie les trois grandeurs, *a*, *b*, *c*, les unes par les autres, les produits *abc*, *bac*, *cba*, *acb*, *bca*, *cab*, ne sont qu'une même chose.

AXIOME IV. OU DEMANDE QUATRIEME.

23. *Les produits de differentes multiplications sont égaux, s'ils sont faits de grandeurs égales & de multiplicateurs égaux.*

Il est évident que des grandeurs égales multipliées également, c'est-à-dire prises également tant de fois, doivent faire des produits égaux.

On suppose que les Règles qu'on a données pour multiplier sont bonnes, & qu'ainsi lorsqu'on les a suivies, on n'a point fait d'erreur. Pour entendre les démonstrations des Theorêmes qu'on va proposer, il n'y a qu'à faire les multiplications qu'il faut faire, & ensuite ouvrir les yeux pour voir ce que les produits de ces multiplications contiennent.

Pour composer les Puissances, c'est-à-dire pour élever une Grandeur à quelque Puissance qu'on veuil-

veuille, *il n'eſt queſtion que de la multiplier ſelon qu'elle le doit être par ſa définition. Par exemple, pour élever* b + d *au ſecond degré, il faut multiplier* b + d *par* b + d. *Selon la règle, le produit de cette multiplication ſera* bb + 2bd + dd, *quarré de* b + d. *Ainſi pour avoir le cube de* b + d, *il faut multiplier le quarré de* b + d, *qui eſt* bb + 2bd + dd *par* bd; *le produit* b^3 + 3bbd + 3bdd + d^3 *ſera le cube de* b + d.

Soit donné cette Grandeur b − d *pour avoir ſon cube, je multiplie* b − d *par lui-même, pour avoir ſon quarré, qui eſt* b^2 − 2bd + dd, *que je multiplie par la même Grandeur* b − d. *Je ferai l'operation au long, afin de m'exercer. Je multiplie donc* 1°, b^2, *ou* bb, *par* b, *ce qui me donne* bbb *ou* b^3. 2° *Je multiplie* − 2bd *par* b. *Or comme il faut ſuppléer le ſigne* + *devant une grandeur qui n'a aucun ſigne exprimé, c'eſt comme ſi je multipliois* − 2bd *par* + b; *partant puiſque* − *en* + *donne* −, *le produit eſt* − 2bbd. 3° *Je multiplie* + dd *par* b; *le produit eſt* + ddb.

Enſuite je multiplie le même quarré b^2 − 2bd + dd *par* − d. 1°. b^2 *ou* + bb *par* − d, *ainſi comme* − *en* + *donne* −, *le produit eſt* − bbd. 2°, − 2bd *par* − d; *& puiſque* − *en* − *donne* +, *ce produit ſera* + 2bdd. 3°, *Je multiplie* + dd *par* − d; *&* − *en* + *donnant* −, *ce produit eſt* − d^3. *Ainſi le cube de* b − d *eſt* b^3 − 3bbd + 3bdd − d^3. *Il n'eſt point néceſſaire que je parle de la Compoſition des autres Puiſſances, il n'y a qu'à les multiplier ſelon leurs définitions.*

CHAPITRE II.

Propositions touchant la Composition des Puissances.

PREMIERE PROPOSITION.

24 *LEs parties* b & d *de la grandeur* x, *ayant été multipliées par* z, *elles font un plan ou produit égal à celui de la grandeur entiere* x, *multipliée par le même multiplicateur* z; *où le plan fait de la grandeur entiere* x *par* z, *est égal au plan fait des parties* b & d *par* z.

Il faut démontrer que $zb + zd = xz$. Les parties $b + d$ sont égales à la grandeur entiere x: Donc, *par le quatrieme Axiome ci-dessus*, les produits $zb + zd$ & xz étant fait de grandeurs égales, doivent être égaux.

SECONDE PROPOSITION.

25 *Le plan ou le produit de deux grandeurs entieres* x & z, *multipliées l'une par l'autre, est égal au plan ou produit fait de* b + d *parties de* x, *multipliées par* f + g *parties de* z.

C'est à-dire, que $xz = fb + fd + gb + gd$. On suppose que $d + b = x$, & $f + g = z$: Donc *par le quatriéme Axiome ci-dessus*, le produit de $b + d$ par $f + g$, doit être égal à celui de x par z.

TROISIEME PROPOSITION.

26 *La grandeur* z *ayant été divisée en ses parties* b & d, *le quarré de la toute* z *est égal aux deux plans faits de la toute* z, *multipliée par chacune de ses parties* b & d.

Le quarré de la toute z est zz, les plans de z par

par *b* & par *d* ſont $zb + zd$. Or *par le premier Axiome*, la toute *z*, & ſes parties $b + d$, ayant été multipliez par le multiplicateur commun *z*, doivent faire des produits égaux: Donc $z\dot{z} = zb + zd$; ce qu'il falloit démontrer.

QUATRIEME PROPOSITION.

Deux plans égaux ajoutez en une ſomme, ſont égaux à un plan fait du double de l'une de leurs racines, multipliée par l'autre. 27

Soient ces deux plans égaux *by* & *by*, la grandeur *m* eſt le double de *b*; ainſi $b + b$ ſont les parties de *m*: Donc, *par le premier Axiome*, le plan *my* eſt égal au plan $by + by$; ce qu'il falloit démontrer.

CINQUIEME PROPOSITION.

La grandeur z multipliée par b *l'une de ſes parties, eſt égale au produit de ſes parties* b & d *par la même partie* b: *ou le produit de z par* b, *eſt égal au quarré de* b, *plus le plan de* b *par l'autre partie* d. 28

Il faut démontrer que $zb = bb + bd$. Les parties de la grandeur *z*, ſont $b + d$: Donc, *par le premier Axiome*, en multipliant *z* & $b + d$ par le même multiplicateur *b*, les produits ſeront égaux $zb = bb + bd$, qui eſt ce qu'il falloit prouver: car, comme vous le voyez, le plan *zb* eſt égal au quarré de *b*, qui eſt *bb*, plus le plan de *b* multiplié par l'autre partie *d*.

SIXIEME PROPOSITION.

Le quarré de la grandeur z eſt égal aux quarrez de chacune des parties de z, plus 2 fois le plan de ces parties. 29

Les parties de z ſont $b + d$. En multipliant ces deux grandeurs z & $b + d$ par des multiplicateurs égaux, les produits ſeront égaux *par le quatrieme Axiome*. Ainſi puiſque z eſt égal à $b + d$, le produit de z par z, qui eſt zz, ſera égal au produit de $b + d$ par $b + d$, qui eſt $bb + 2bd + dd$; ainſi $zz = bb + 2bd + dd$. Or vous voyez que $bb + 2bd + dd$ contient les quarrez de b & de d parties de z, & deux fois le plan bd fait de ces deux parties b & d.

Je retranche de cette Edition pluſieurs Theorêmes, qui ſont du ſecond Livre d'Euclide, que j'avois démontré dans l'Edition précédente. On les trouvera dans mes Elémens de Géometrie dans leur place. Ici ils ſont inutiles. Ceux qui ont fait attention à ce qu'ils viennent de lire, ont un chemin ouvert pour trouver une infinité de nouveaux Theorêmes. Car, par exemple, ſi $z = 3b$, *le quarré de* z *étant égal au quarré de* 3b; $zz = 9bb$, *on peut propoſer ce Theorême*: Le quarré de la grandeur entiere eſt égal à neuf fois le quarré de ſa troiſieme partie. *La démonſtration eſt évidente. On pourroit faire une infinité de nouveaux Theorêmes ſemblables; ce qui fait voir la fécondité de cette méthode.*

PROBLEME PREMIER.

30 *Connoiſſant un nombre plan avec l'une de ſes racines, connoitre ſon autre racine.*

Je propoſe ce Problême ſur les nombres; car ce n'eſt pas une queſtion, dans le calcul par lettres: on voit d'abord que les racines de bd ſont b & d.

Soit propoſé ce nombre plan 48, avec l'une de ſes racines 24; pour trouver la ſeconde racine, c'eſt-à-dire pour trouver un nombre qui multipliant

pliant 24 faſſe 48, & qui ſoit ainſi la ſeconde racine du nombre plan 48; pour trouver, dis-je, cette racine, je diviſe 48 par 24, & le quotient 2 de cette diviſion ſera la racine que je cherche, puiſque ce quotient 2 multipliant 24, doit faire 48. Liv. I. n. 21.

PROBLEME SECOND.

Connoiſſant un nombre ſolide avec deux de ſes racines, ou le plan de ſes deux racines, connoître la troiſieme racine. 31

Le ſolide donné eſt 36, les deux premieres racines ſont 3 & 4, dont le plan ou produit eſt 12; pour connoître l'autre racine il faut diviſer 36 par 12, le quotient de cette diviſion qui eſt 3 ſera la racine que l'on cherche; car cette racine doit être un nombre qui multipliant 12 faſſe 36. Or Liv. I. n. 21. ce quotient multipliant 12, doit produire 36: il eſt donc la troiſieme racine de ce ſolide.

SECTION TROISIEME.

DE LA RESOLUTION DES PUISSANCES OU DE L'EXTRACTION DE LEURS RACINES.

CHAPITRE PREMIER.

Ce que c'eſt que Réſolution d'une Puiſſance, ou Extraction de ſa Racine. Ce que c'eſt que Racine.

32 REſoudre une Puiſſance, c'eſt trouver la Grandeur qui l'a compoſée en ſe multipliant. L'on ne conſidere ici que les Puiſſances qui ſont faites par la multiplication d'une certaine grandeur qui eſt multipliée tant de fois, ſelon le degré de la Puiſſance où l'on veut l'élever. La Grandeur qui produit cette Puiſſance en eſt la racine. C'eſt dans l'extraction de ces racines que conſiſte la réſolution des Puiſſances. Elles ſont dites quarrées, cubiques, &c. ſelon qu'elles ſont racines de quarrez, de cubes. Ainſi extraire la racine quarrée de *bb*, c'eſt trouver une grandeur qui multipliée par elle-même, faſſe le quarré *bb*. Extraire la racine cube de *bbb*, c'eſt trouver une grandeur qui, multipliée cubiquement, faſſe le cube *bbb*.

Il eſt évident que quand les grandeurs ſont petites, ou qu'elles s'expriment avec peu de lettres, comme *bb*, *bbb*, on voit tout d'un coup que la racine quarrée de *bb* eſt *b*: que la racine cube de *bbb* eſt *b*. Il en eſt de même des nombres quarrez & cubes; on voit tout d'un coup quelles ſont leurs racines, quand ils ſont petits. Il eſt facile de voir que la racine quarrée de 4 eſt 2, que celle de 9 eſt 3; car on apperçoit que 2 multiplié par 2 fait 4, & que 3 multiplié par 3 fait 9. Il en eſt de même des nombres cubes. 8 eſt un nombre cube, dont la racine eſt 2. On apperçoit aiſément que ce nombre multiplié deux fois par lui-même fait 8.

Par conſéquent il ne ſeroit pas néceſſaire de chercher des règles pour l'extraction des racines, ſi tous les nombres étoient petits. Quand les nombres ſont grands, comme eſt celui-ci 293764, on ne voit pas tout d'un coup quelle eſt ſa racine quarrée, c'eſt-à-dire quel peut être le nombre qui, multiplié par lui-même, produiſe 293764. Or on le peut connoître en le cherchant par parties, comme on le va voir. L'artifice dont on ſe ſert pour l'extraction des racines quarrées, cubiques, & de quelque puiſſance que ce ſoit, eſt très ingénieux. Je l'expliquerai avec ſoin. Ce qu'on va voir ſera un parfait modele de la maniere de bien ménager la capacité de ſon eſprit, faiſant en ſorte qu'il ne ſoit pas obligé de voir trop de choſes à la fois, les partageant afin qu'il les conſidere par parties.

Pour ce qui eſt des grandeurs de pluſieurs dimenſions, qui ne ſont pas des quarrez, des cubes, &c. il n'eſt pas poſſible d'en extraire les racines, quand leur valeur eſt exprimée par nombre, à moins que de connoître une de leurs racines. Quand je vois *bd*, d'abord je connois

que

que c'est un plan fait de *b* multiplié par *d*. Quand je vois *bbd*, je connois que c'est un solide fait du quarré *bb* multiplié par *d*; mais il n'en est pas de même des nombres. On considere ce nombre 24 comme un nombre plan; & l'on propose d'en extraire les racines. Il est évident que comme il s'agit de trouver deux nombres qui, multipliez l'un par l'autre, fassent 24, cette question se peut résoudre en differentes manieres; c'est-à-dire qu'on peut assigner à 24, considéré comme un nombre plan, plusieurs racines; car il peut être fait de 2 par 12, de 3 par 8, de 4 par 6. On peut même considerer 24 comme un nombre solide, c'est-à-dire fait d'un nombre plan multiplié par un autre nombre; car 2 & 12, 3 & 8, 4 & 6 pouvant être les racines de 24, on peut concevoir que 12 est un plan dont les racines sont, ou 3 & 4, ou 2 & 6. De même 8 sera un plan, si on considere qu'il est fait de 2 & de 4; comme pareillement que 6 est un plan, dont les racines sont 2 & 3. Par conséquent pour connoitre les racines dont on conçoit déterminément qu'un plan, qu'un solide est fait, il en faut connoitre une des racines, laquelle étant connue on connoitra facilement la seconde, comme on l'a vu ci-dessus. Lors qu'une puissance n'est pas parfaite, c'est-à-dire qu'elle n'a point de racine qu'on puisse exprimer, ou que si elle en a on ne la connoit point, on met devant ce signe $\sqrt{}$ qu'on appelle le Signe Radical. On y ajoute un petit chiffre, qui marque de quelle puissance la grandeur qui a ce signe est la racine; si c'est d'un quarré, d'un cube.

Ainsi $\sqrt[2]{bc}$ marque la racine d'une seconde puissance: $\sqrt[3]{bcd}$, la racine de la troisieme puissance, ou d'un cube; $\sqrt[4]{}$, celle d'une quatrie-

trieme puiſſance. Quand il n'y a point de chiffre dans le ſigne radical, il y faut ſouſentendre ce chiffre 2 ; c'eſt-à-dire, que c'eſt une marque que la grandeur qui eſt après le ſigne $\sqrt{}$, eſt une ſeconde puiſſance, ou un quarré. Mais ce n'eſt que dans le ſixieme Livre que nous parlerons de ces puiſſances imparfaites.

CHAPITRE II.

De l'Extraction des Racines quarrées.

UNe grandeur n'eſt proprement dite quarrée, que lorſqu'elle eſt produite par une gran- 33
deur multipliée par elle-même. 9 eſt un nombre quarré, parce qu'il peut être fait par 3 multiplié par lui-même. 10 n'eſt pas un nombre quarré, car on ne trouve point de nombre qui, multiplié par lui-même, faſſe 10. On dit de même d'une grandeur exprimée par lettres, que c'eſt un quarré, lorſqu'il eſt fait par les mêmes lettres multipliées l'une par l'autre. *bd* n'eſt pas un quarré ; car on voit bien que *bd* n'eſt pas fait par une même lettre multipliée par elle-même, comme eſt *bb*, *dd*. Quand le nombre des lettres eſt ainſi petit, on apperçoit aiſément la racine de la puiſſance exprimée par des lettres. Il en eſt de même des puiſſances qui ſont exprimées avec des chiffres. On voit d'abord que la racine quarrée de 4 eſt 2, que celle de 9 eſt 3. Or pour extraire les racines des grandes ſommes, il faut connoitre ces racines ſimples, c'eſt-à-dire celles des nombres quarrez les plus ſimples, comme ſont les quarrez de chaque caractere. Par exemple, que le quarré

de

de 5, eſt 25, & que la racine de ce nombre quarré 25 eſt 5. Vous voyez devant vos yeux ces racines & ces quarrez. Sous chaque caractere ſimple eſt ſon quarré. Sous 6 eſt 36, dont 6 eſt la racine.

Racines,	1	2	3	4	5
Quarrez,	1	4	9	16	25
Racines,	6	7	8	9	10
Quarrez,	36	49	64	81	100

PREMIER THEOREME.

34 *Tout nombre quarré comme celui-ci* 293764, *fait de* 542 *multiplié par* 542, *contient* 1°. *les quarrez de chacune de ſes parties* 5, 4, 2.

2°. *Deux fois le plan de* 5 *multiplié par* 4, *ou ce qui eſt la même choſe, un plan fait du double de* 5, *qui eſt* 10, *multiplié par* 4.

3°. *Deux fois le plan de* 54 *par* 2, *ou un plan fait de* 108 *double de* 54 *par* 2.

Cela s'apperçoit clairement en multipliant 542, racine du nombre propoſé, par 542. On le voit d'une maniere générale, en ſe ſervant de lettres. Car le produit de $b+d$ par $b+d$, eſt $bb+2bd+dd$. Vous voyez dans ce produit les deux quarrez de b & de d, & deux fois un plan fait de b multiplié par d.

Si on marque les trois chiffres de 542 par ces trois lettres $b+c+d$, & qu'on en prenne le quarré les multipliant par elles-mêmes, on verra à l'œil ce qu'il faut prouver. Faiſons l'operation entiere. Je multiplie 1°, $b+c+d$ par b, le produit eſt $bb+bc+bd$. 2°. $+c+d$ par c. Le produit eſt $bc+cc+cd$. 3°. $b+c$

$+c+d$ par d, le produit eſt $bd+cd+dd$. Ce qui fait $bb+2bc+cc+2bd+2cd+dd$. Vous voyez que ce produit contient 1°. les trois quarrez des trois lettres b, c, d. 2°. Deux fois le plan de b par c. 3°. Les plans $2cd$ & $2bd$, qui ſont égaux *ſup.* n. 27. au double du plan fait de $b+c$ multiplié par d, c'eſt-à-dire, de 54 par 2. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SECOND THEOREME.

Ayant partagé un nombre quarré, tel que 293764 *de deux en deux caracteres,* 35

29	37	64
C	B	A

1°. *Le quarré du premier caractere de ſa racine, s'il peut être exprimé par un ſeul chiffre, eſt dans la premiere place de la premiere tranche* A, *commençant de droit à gauche.*

2°. *Le quarré du ſecond chiffre eſt dans la premiere place de la ſeconde tranche* B, *s'il peut être exprimé par un ſeul chiffre.*

3°. *Le quarré du troiſieme chiffre de la racine eſt dans la premiere place de la troiſieme tranche* C. *Ainſi de ſuite.*

Pour reconnoitre la vérité de cette propoſition, il n'y a qu'à produire un nombre quarré comme eſt celui-ci 293764, en multipliant 542 par 542; car vous verrez que les quarrez de 5, de 4 & de 2 ſont placez où on les a marquez. Faites l'operation en ſuivant les règles, le quarré de 2 qui eſt 4 ſe trouvera dans la premiere place de la premiere tranche. Le quarré de 4 ne ſera qu'en partie dans la premiere place de la ſeconde tranche, car ſon quarré eſt 16, qui demande

deux

deux chiffres. Le quarré de 5 eſt 25, qui par la même raiſon ne pourra pas être marqué tout entier ſous la premiere place de la troiſieme tranche.

Corollaire.

36. *Un nombre quarré ayant été tranché, le nombre des tranches eſt égal à celui des chiffres de la racine de ce quarré.*

Car le quarré du troiſieme chiffre eſt néceſſairement dans la troiſieme tranche, par le Théorême précédent: Or ce quarré, pour grand qu'il ſoit, peut être contenu dans cette tranche; car 9 eſt le plus grand des chiffres, dont le quarré 81 s'exprime par deux ſeuls chiffres. Quand le quarré du dernier chiffre eſt petit, la derniere tranche n'a qu'un chiffre.

Troisieme Theoreme.

37. *Un nombre quarré tel que* 293764, *ayant été partagé par tranches, comme on le vient de dire,* 1°. *le plan fait du double de* 5 *multiplié par* 4, *eſt entre la premiere place de la tranche* C, *& la premiere place de la tranche* B. 2°. *Le plan fait du double de* 54 *multiplié par* 2, *eſt entre la premiere place de la tranche* B, *& la premiere place de la tranche* A.

Par la premiere propoſition le nombre quarré propoſé contient ces deux plans: & ſi on fait attention à l'operation par laquelle on produit le nombre quarré, on verra que la valeur de ces plans eſt placée où la propoſition préſente l'aſſigne.

Quatrieme Theoreme.

38. *S'il y avoit* 4 *caracteres dans la racine entre le premier quarré & le ſecond quarré, commençant de-*

de droit à gauche, il y auroit un plan fait du double des trois racines des trois quarrez ſuivans, multipliez par la racine du premier quarré.

Ce qu'on vient de dire fait appercevoir la vérité de cette propoſition, & en même tems de toutes les autres qu'on peut faire quand la racine d'un nombre quarré a cinq, ſix, ſept chiffres.

PROBLEME PREMIER.

Trouver la racine quarrée d'une grandeur exprimée par lettres. 39

Si cette grandeur eſt incomplexe, comme *dd*, on voit d'abord que *d* eſt la racine.

Soit cette grandeur complexe $bb+2bd+dd$, propoſée pour en extraire la racine quarrée, ſuivant ce qu'on vient de remarquer *ſup.* n. 34. 1°. Je prens la racine quarrée de *bb*, qui eſt *b*, je multiplie *b* par *b*; ce qui fait *bb*, que j'ôte de *bb*, & il ne reſte rien. 2°. Je diviſe le plan $2bd$ par $2b$, qui eſt le double de la racine *b* qu'on vient de trouver. Le quotient de cette diviſion eſt *d*, qui eſt la racine du quarré *dd*. Ainſi je connois que la racine quarrée de $bb+2bd+dd$ eſt $b+d$.

Soit cette grandeur complexe $bb-2bd+dd$, je fais la même choſe. Je prens la racine de *bb*, qui eſt *b*, par le double de laquelle je diviſe le plan $-2bd$, le quotient eſt $-d$ qui eſt la ſeconde racine; ainſi on trouve que la racine qu'on cherche eſt $b-d$.

Remarquez bien que aa+ab−ab−bb, *ou* aa−bb *n'eſt pas une grandeur quarrée; car elle eſt faite de deux grandeurs inégales;* de a+b, *multipliée par* a−b. *Ainſi on n'en peut tirer la racine qu'en mettant devant elle le ſigne radical* $\sqrt{}$ aa−bb.

PRO-

PROBLEME SECOND.

4° *Trouver la racine d'un nombre quarré donné.*

1°. *Un nombre quarré étant proposé pour en extraire la racine, il faut le couper par tranches de deux en deux caracteres, commençant de la droite à la gauche.*

Cette premiere operation vous fera déja connoitre combien la racine du nombre proposé a de caracteres, par le Corollaire du second Théorême. S'il y a trois tranches, il y a trois caracteres dans la racine cherchée.

Soit donc ce nombre quarré 293764, pour en trouver la racine. 1°. Je le partage de deux caracteres en deux caracteres par tranches, ainsi.

29 | 37 | 64

2°. *Il faut extraire la racine quarrée du nombre qui est contenu dans la derniere tranche, si ce nombre est quarré; & s'il ne l'est pas, du quarré qui est le plus proche.*

Cette racine sera le dernier chiffre de la racine cherchée; puisque son quarré est contenu dans cette tranche, par le second Théorême ci-dessus. J'extrais donc la racine quarrée de la derniere tranche 29. Ce nombre n'étant pas quarré, je prens la racine du nombre quarré qui approche le plus de 29, savoir 25., dont 5 est la racine. Ce caractere 5 est le dernier caractere de la racine cherchée, que je marque dans un demi cercle, comme le quotient d'une division, ainsi que vous le voyez.

29 | 37 | 64 | (5

3°. *Il faut retrancher le quarré du caractere trouvé de la premiere tranche, où il est contenu; ce qui est une des preuves de l'operation.*

J'ôte

J'ôte ainsi le quarré de 5, qui est 25, de 29, & il reste 4.

4°. *Il faut doubler le caractere trouvé de la racine cherchée, & après avoir placé ce double, de sorte que le premier caractere soit placé sous le dernier chiffre de la tranche précedente, il faut diviser les nombres de dessus par ce double; le quotient de cette division sera le chiffre pénultieme de la racine que l'on cherche.*

Je prens donc le double du caractere trouvé 5: ce double est 10, que je place sous 43: de sorte que le zero est sous le dernier caractere de la tranche précédente. Je divise 43 par 10; le quotient est 4, que je marque après 5 dans le demi-cercle. Je pose aussi le même chiffre 4 sous la premiere place de la même tranche, après 10.

4		
10	37	64 (54
1	04	

Je suis assuré que 4 est véritablement le second chiffre de la racine que je cherche; car par le troisieme Théorême, *sup.* n. 37 entre le quarré du chiffre qu'on vient de trouver, & le quarré de l'autre chiffre qu'on cherche, est un plan qui a pour une de ses racines le double du dernier caractere, par exemple, dans cette question, le double de 5 qui est 10, & pour l'autre racine, celle du quarré qui est contenu dans la tranche précédente. Or par le Probleme *sup.* n. 30. en divisant le plan dont nous parlons par l'une de ses racines connues, savoir 10 qui est le double de 5, le quotient de la division qui est 4, montre que la seconde racine de ce plan est 4, qui est aussi par conséquent le second caractere de la racine quarrée du nombre proposé.

Il

5°. *Il faut retrancher ce plan dont on vient de parler, des nombres où il eſt contenu.*

6°. *Il faut de plus ôter le quarré du caractere de la racine que l'on a trouvée.*

Prenez garde d'ôter ce quarré des nombres où il eſt contenu. S'il n'eſt exprimé que par un chiffre, ſelon le ſecond Théorême ci-deſſus, il eſt contenu dans le premier chiffre de cette ſeconde tranche : & s'il eſt exprimé par deux chiffres, il ſera contenu dans les deux chiffres de cette tranche, au moins en partie.

Dans le même exemple j'ôte des nombres de deſſus, le plan de 10, multiplié par 4 que nous venons de trouver, & le quarré de 4; diſant, 4 fois 10 font 40, de 43 ôtez 40, reſte 3. Enſuite diſant, 4 fois 4 font 16, de 37 ôtez 16, reſte 21.

4	21	64 (54
20	37	
1	04	

7°. *S'il y a plus de deux tranches, il faut doubler les caracteres trouvez de la racine cherchée, & après avoir placé ce double ſous le reſte du nombre propoſé, de ſorte que le dernier caractere ſe trouve ſous la derniere place de la tranche dont on veut extraire la racine, il faut diviſer les nombres de deſſus par ce double, le quotient ſera le caractere qu'on cherche.*

Puiſqu'il y a donc plus de deux tranches dans le nombre propoſé, je double les caracteres trouvez 54 de la racine cherchée. Je place le double de 54 qui eſt 108, comme il a été enſeigné, ſavoir 8 ſous la derniere place de la premiere tranche. Je diviſe 216 par 108. le quotient

sient est 2, que je place après 54, & sous la premiere place de la derniere tranche.

$$\begin{array}{c|c|c} 21 & 84 & (542 \\ 10 & 82 & \end{array}$$

8°. *Il faut retrancher ce plan dont on vient de parler, des nombres de dessus : outre cela le quarré du caractere de la racine, lequel caractere on vient de connoître.*

S'il n'y a plus d'autres tranches, & qu'il ne reste aucun nombre, c'est une marque que le nombre proposé étoit quarré. S'il reste quelque chose, il n'étoit pas quarré.

Je multiplie 1082 par 2, & j'ôte le produit des nombres sous lesquels 1082 sont écrits, disant 2 fois 10 font 20; de 21 ôtez 20, il reste 1. Ensuite je dis, 2 fois 8 font 16; de 16 ôtez 16, il ne reste rien: 2 fois 2 font 4, de 4 ôtez 4, il ne reste rien; ainsi le nombre proposé 293764 est un nombre quarré, dont 542 est la racine.

Voici la même extraction dans laquelle se fait la soustraction, selon la maniere que nous avons proposée Liv. I. n. 13.

$$\begin{array}{c|c|c|} 4 & 21 & \infty \\ 29 & 37 & 84 \\ 1 & 84 & 82 \\ & 184 & \end{array} \quad (542$$

Soit le même nombre 293764. Je dis, la racine de 29 est 5; 5 fois 5 font 25, qui ôtez de 29 reste 4, que j'écris dessus.

Je double 5, ce qui fait 10, que j'écris sous le nombre proposé, ainsi que vous le voyez. Je dis: en 43 combien 10? Il y est 4 fois, ce que j'écris au quotient, & sous 7; puis je

multiplie 104 par 4, disant: 4 fois 4 font 16. De 17 j'ôte 16, reste 1, que j'écris dessus, & retiens 1 par mémoire.

Puis 4 fois 0 est 0, avec un de retenu fait 1 que j'ôte de 3, reste 2, que j'écris dessus 3.

Puis 4 fois 1 fait 4, qui ôtez de 4, reste 0.

Ensuite je double 54, ce qui fait 108, que j'écris pour diviseur, & je trouve que ce double est contenu deux fois dans 216. J'écris 2 au quotient, & sous 4; puis je dis; 2 fois 2 font 4, ôtez de 4, il ne reste rien: 2 fois 8 font 16, de 16 ne reste rien, & retiens 1 par mémoire. Puis deux fois 0 est 0, avec 1 de retenu fait 1 que je soustrais, il ne reste rien; puis 2 fois 1 fait 2 que je soustrais: ainsi il ne reste rien, &c.

La preuve de cette operation se fait en multipliant la racine trouvée 542 *par elle-même; si son produit est* 293764, *l'operation a été bien faite.*

Autre Exemple.

Ce nombre 71824, est donné pour extraire la racine quarrée.

1°. Après l'avoir partagé par tranches, j'extrais la racine du nombre quarré, qui approche le plus de 7. Ce nombre quarré est 4, dont la racine est 2, que je marque: Après j'ôte de 7 le quarré de 2 qui est 4, & il reste 3.

3			
7	18	24	(2
	46		

2°. Je double le caractere trouvé 2. Je place ce double qui est 4 sous 1, par lequel je divise 31, le quotient est 7; mais parce que ce

ce quotient eſt trop grand, comme il eſt facile de l'expérimenter, je ne prens pour quotient que 6 que je place après 2, & ſous la premiere place de la ſeconde tranche, c'eſt-à-dire ſous 8. Je multiplie 46 par 6, & j'en ôte le produit de 318, diſant: 6 fois 4 font 24, que je retranche de 31, reſte 7; 6 fois 6 font 36, que je retranche de 78, reſte 42.

3	4 12 18 46	24 | (26

3°. Il ne reſte plus du nombre propoſé que 4224, que j'écris & que je trancne, comme vous le voyez. Je double les caracteres 26 de la racine cherchée, ce double eſt 52, que je place comme il a été enſeigné, en écrivant 2 ſous la derniere place de la premiere tranche, & je diviſe par ce nombre les nombres qui ſont deſſus. Le quotient de cette diviſion eſt 8, que je mets après les deux caracteres déja trouvez de la racine que je cherche, & en même tems ſous la premiere place de la premiere tranche.

42	6 24	(268
5	28	

Je multiplie 528 par 8, je retranche le produit de cette multiplication des nombres de deſſus, qui ſont 4224; ce que je fais en diſant, 8 fois 5 ſont 40; de 42 ôtez 40, reſte 2. : 8 fois 2 font 16, de 22 ôtez 16, reſte 6: 8 fois 8 font 64, il ne reſte rien. Ainſi ayant obſervé les Règles, je ſuis aſſuré que 71824 eſt un nombre quarré dont 268 eſt la racine.

Autre Exemple.

On propose d'extraire la racine quarrée de ce nombre 92428. 1°. Après l'avoir tranché j'extrais la racine de la derniere tranche où est 9, qui est un nombre quarré; cette racine est 3, que je marque à part: je prens le quarré de cette racine que j'ôte de 9, & il ne reste rien.

9	24	28 | (3

2°. Je double ce caractere trouvé 3, je pose le double qui est 6, sous le dernier caractere de la seconde tranche, qui est 2: je ne puis pas diviser 2 par 6; ainsi le second caractere de la racine cherchée est un zero. Je marque donc un zero après 3, & sous le premier caractere de la seconde tranche. Je multiplie 60 par zero, & cela ne fait rien; je ne puis donc rien ôter des nombres sous lesquels 60 sont placez.

9	24	28	(30
	60		

3°. Je double 30 qui est au quotient: ce double est 60, que je place de sorte que le caractere zero soit sous la derniere place de la premiere tranche, savoir sous 2.

Je divise les nombres de dessus par 60, le quotient est 4, que je marque après 30 au quotient, & sous le premier caractere de la premiere tranche.

9	24	28	(304
	6	04	

Je multiplie 60 par 4, disant: 4 fois 6 font 24, que je retranche du nombre de dessus 24. & il ne reste rien: 4 fois zero sont zero, 4 fois

fois 4 font 16, de 28 ôtant 16, il reste 12.

9	24	12 28 96	(304

Ainsi le nombre proposé 92428 n'est pas un nombre quarré; celui qui en approche le plus est 92416, dont la racine est 304.

Nous ferons voir dans la suite que lorsqu'un nombre n'est pas quarré, comme 18 *ne l'est pas, il est impossible de trouver une grandeur qui, multipliée par elle-même, fasse le nombre* 18.

CHAPITRE III.

De l'Extraction des Racines cubes.

41 L'Extraction de la racine cube d'un nombre qui est grand, ne se fait que par parties, comme l'extraction des racines quarrées. On coupe le nombre cube proposé par tranches, &, l'on ne tire la racine que d'une de ses parties qui soit un cube, dont la racine se puisse exprimer avec un seul chiffre. Ainsi il faut premierement savoir les cubes des premiers chiffres, qu'on ne peut ignorer. Vous voyez ces cubes dans cette Table.

Racines.	1	2	3	4	5
Cubes.	1	8	27	64	125
Racines.	6	7	8	9	10
Cubes.	216	343	512	729	1000

LEMME.

La grandeur b + c *étant multipliée cubiquement, ſon cube* bbb + 2bbc + ccb + bbc + 2ccb + ccc *ou* bbb + 3bbc + 3ccb + ccc *contient les cubes des parties* b *&* c, *& deux ſolides, dont le premier qui eſt* 3bbc *eſt fait du triple du quarré de la derniere racine* b, *multiplié par la premiere racine* c, *& le ſecond* 3ccb *eſt fait du triple du quarré de* c *multiplié par* b.

Cela ſaute aux yeux. Si la grandeur donnée étoit $b-c$, il y auroit les mêmes parties; mais avec des ſignes en parties contraires, comme il eſt évident. Le cube de $b-c$ eſt $b^3 - 3bbc + 3ccb - c^3$.

Si la grandeur donnée avoit eu trois lettres, par exemple qu'elle eût été $b+c+d$, le cube de la toute contiendroit les cubes particuliers de ces trois lettres, ſavoir bbb, ccc, ddd: outre cela quatre ſolides, dont le premier ſeroit $3bbc$, le ſecond $3bcc$; le troiſieme fait du triple de $b+c$, multiplié par le quarré dd: ainſi, ſi $b+c=x$, ce troiſieme ſolide ſeroit $3xdd$. Le quatrieme ſolide eſt fait du triple du quarré de $b+c$ ou de x, qui eſt égal à $b+c$ & de d: ainſi ce quatrieme ſolide ſeroit $3xxd$.

CINQUIEME THEOREME.

42 *Un nombre cube tel que celui-ci* 160103007 *fait de cette racine* 543 *multipliée cubiquement, contient* 1°. *les trois cubes de chacun des caracteres de ſa racine* 543. 2°. *quatre ſolides, dont le premier eſt fait du triple du quarré de* 5, *multiplié par* 4: *& le ſecond eſt fait du triple de* 5, *multiplié par le quarré de* 4: *le troiſieme eſt fait du triple du quarré de* 54, *multiplié par* 3: *& le quatrieme fait*

fait du triple de 54, *multiplié par le quarré de* 3.

Par ces trois lettres $b+c+d$ du Lemme précédent, nous avons pu marquer ce nombre 543, qui étant multiplié cubiquement fait 160103007, par conſéquent ce nombre cube 160103007 eſt égal au cube de $b+c+d$ qui contient les parties exprimées dans la propoſition.

SIXIEME THEOREME.

Ayant partagé ce nombre cube 160103007 *par* 43
des tranches ou des lignes, commençant de droit à gauche de trois caracteres en trois caracteres, comme vous le voyez:

160	103	007
C	B	A

1°. *Le cube de* 5 *eſt dans la premiere place de la tranche* C, *& dans les places ſuivantes; parce que ce cube ne peut être exprimé que par trois chiffres.* 2°. *Le cube de* 4 *eſt dans la premiere place de la tranche* B, *& dans le chiffre ſuivant.* Et 3°, *le cube de* 3 *eſt dans la premiere place de la tranche* A *en partie; parce que ce cube ne peut être exprimé qu'avec deux chiffres.*

Cette propoſition ſe prouve par l'operation, qui en multipliant la racine 543 a produit le nombre cube. Pour être plus clair, & en même tems plus court, j'applique à un nombre cube particulier ce qui convient à tous. Ce qu'on a dit de l'extraction des racines quarrées ſert à comprendre ce qu'on voit ici: ce qui fait que je m'étens moins.

COROLLAIRE.

Un nombre cube ayant donc été coupé par tran- 44

chez, il y a autant de caracteres dans sa racine que de tranches.

Car 1°. s'il y a trois chiffres dans sa racine, le cube du dernier, après lequel l'on n'ajoute plus rien, sera dans la premiére place & dans les suivantes de la troisiéme tranche. Ainsi comme le cube du plus grand chiffre, qui est 9, peut être exprimé par trois chiffres, savoir 729, si la racine du nombre proposé n'a que trois chiffres, il ne peut pas y avoir plus de trois tranches. Quand la derniere tranche n'a pas trois chiffres comme les autres, c'est une marque que le cube du dernier chiffre a pour racine 4, ou quelque autre moindre nombre.

Septieme Theoreme.

45 *Les deux premiers solides, l'un fait du triple du quarré de 5, multiplié par 4, l'autre fait du triple de 5 multiplié par le quarré de 4, sont entre C & B; les deux autres, dont l'un est fait du triple du quarré de 54 multiplié par 3, & l'autre fait du triple de 54 multiplié par le quarré de 3, sont entre B & A.*

Cette proposition est évidente à quiconque multiplie cubiquement 543, & qui fait attention aux multiplications partiales qu'il fait.

Huitieme Theoreme.

46 *S'il y avoit quatre chiffres dans la racine cubique, entre le premier & le second cube, il y auroit deux solides ou leur valeur. Le premier fait du triple des trois racines des trois cubes ou racines, multiplié par le quarré de la premiere racine; le second fait du triple du quarré des trois racines, multiplié par la premiere racine.*

Cette proposition se prouve comme les autres.

tres. On apperçoit assez ce qui arrive lors qu'un nombre cube a cinq, six tranches & davantage.

Probleme Troisieme.

Trouver la racine cube d'une grandeur cube exprimée par lettres. 47

Si cette grandeur est incomplexe, il n'y a pas de difficulté : il est manifeste que la racine cube de bbb est b.

Soit cette grandeur $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, dont il faut tirer la racine cube. La racine cube de a^3 est a, j'ôte a^3 de a^3, & il ne reste rien. Entre le cube a^3 & le cube suivant, est un solide fait du triple de aa multiplié par la racine du cube suivant, selon le Lemme précédent ; je divise donc $3aab$ par $3aa$, le quotient est b, qui est par conséquent la racine du cube suivant. Je multiplie $3aa$ par b ; ce qui fait $3aab$, que j'ôte de $3aab$, il ne reste rien. Entre le cube de a & b, il y a encore un second solide par le même Lemme, fait de $3a$ multiplié par bb. J'ôte donc ce solide de $3abb$, comme aussi le cube b^3, & il ne reste rien ; je suis donc assuré que $a+b$ est la racine cube de $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$.

Probleme Quatrieme.

Trouver la racine d'un nombre cube donné. 1°. *Il faut couper le nombre cube qui a été donné pour en extraire la racine, par tranches de trois caracteres en trois caracteres, commençant de la droite à la gauche.* 48

Cette premiere operation vous fera connoître, par le Corollaire ci-dessus n. 44. le nombre des caracteres de la racine cube cherchée ; s'il y a trois tranches, la racine cherchée a trois chiffres.

Soit donc donné ce nombre cube 160103007, dont il faut trouver la racine. Je le partage en trois tranches de la droite à la gauche, de trois caracteres en trois caracteres.

160 | 103 | 007

2°. *Il faut extraire la racine cubique du nombre contenu dans la derniere tranche, s'il eſt cube; & s'il ne l'eſt pas, du nombre cube qui en approche le plus.*

Cette racine ſera le dernier caractere de la racine cherchée, qu'il faut écrire dans un demi-cercle, comme le quotient d'une diviſion.

J'extrais donc la racine cubique de 160, qui eſt dans la derniere tranche; ce nombre n'eſt pas cube, je trouve dans la table des cubes, qui eſt ci-deſſus, que le cube qui approche le plus de 160 eſt 125, dont la racine eſt 5, que je marque à part, comme nous avons fait juſqu'à préſent dans les diviſions & dans les extractions des racines.

160 | 103 | 007 | (5

3°. *Il faut prendre le cube de ce caractere trouvé, & l'ôter du nombre propoſé.*

On fait de cette maniere l'operation & ſa preuve en même tems: car pour être aſſuré que les parties que l'on dit être dans le nombre cube propoſé y ſont en effet, il faut qu'elles en puiſſent être retranchées. Je retranche donc le cube 125 de la derniere tranche où il eſt contenu, il reſte 35.

35 | 103 | 007 | (5

4°. *Il faut tripler le quarré du caractere trouvé, & écrire ce triple de ſorte que le premier caractere de*

de la droite à la gauche, soit sous le dernier caractere de la tranche suivante.

Le quarré du caractere 5 que j'ai trouvé est 25, dont le triple est 75, que je place comme la Règle l'ordonne.

35	183	007	(5
7	5		

5°. *Il faut diviser par ce triple les nombres sous lesquels il est écrit, & multipliant ce triple par le quotient de cette division, ôter le produit des nombres de dessus.*

Entre le cube du caractere trouvé de la racine cherchée & le précédent, est un solide fait du triple du quarré de 6 multiplié par le caractere précédent de la racine, qui est encore inconnu. Or par le Problême *sup.* n. 31, le quotient de cette division, que la Règle ordonne, sera la racine de ce solide.

Je divise donc par 75 les nombres de dessus qui sont 351, le quotient de la division est 4, qui est le second caractere de la racine cherchée, que je place par conséquent après celui que j'avois trouvé. Je retranche ce solide fait du triple du quarré de 5, qui est 75, multiplié par 4, en disant : 4 fois 7 font 28; de 35 ôtant 28, il reste 7; ensuite 4 fois 5 font 20, de 71 ôtant 20, il reste 51.

5			
7			
35	103	007	(54
7	8		

Il reste donc 5103007 à diviser, que j'écris à part pour éviter la confusion, & que je tran-

tranche comme vous le voyez ci-après.

60. *Il faut prendre le quarré de ce caractere qu'on vient de connoître, & après l'avoir multiplié par le triple du dernier caractere trouvé par la ſeconde Règle, en ôter le produit des nombres qui reſtent, tant en la derniere qu'en la tranche précédente; il faut auſſi ôter le cube de ce caractere, puiſque tout cela eſt contenu dans ces deux tranches par le ſixieme & ſeptieme Théorême*, ſup. *n.* 43 & 45.

Je prens le quarré de 4, qui eſt 16, que je multiplie par 15 triple de 5, ce qui fait 240, que j'ôte de 510, & il reſte 270; ainſi j'ôte d'un même lieu deux ſolides, le premier fait du triple du quarré de 5 multiplié par 4, le ſecond fait du quarré de 4 multiplié par le triple de 5; puiſqu'ils y étoient contenus.

2	6		
8	639 / 1683	007	(54

Après cela il faut retrancher le cube de 4, qui eſt 64; mais prenez garde qu'il faut le retrancher du lieu où il eſt. Or étant exprimé par deux chiffres, il eſt contenu au moins en partie dans les deux premiers chiffres de la ſeconde tranche, ſavoir dans 03. Ayant ôté de cette maniere 64 de 2703, il reſte 2 | 639 | 007.

70. *S'il y a plus de deux tranches dans le nombre cube propoſé, il faut prendre le quarré des racines trouvées, tripler ce quarré, & après l'avoir placé de ſorte que le dernier caractere ſoit ſous la derniere place de la tranche précédente, diviſer les nombres de deſſus par ce diviſeur, le quotient donnera le caractere cherché.*

Il y a en cet endroit un ſolide fait du triple du

du quarré des racines trouvées, multiplié par la racine qu'il faut trouver enſuite. Or diviſant ce ſolide par le triple du quarré des racines trouvées, le quotient de la diviſion donnera cette racine. *Sup.* n. 31.

Je prens le quarré des deux racines 54, qui eſt 2916 que je triple; ce triple eſt 8748, par lequel nombre je diviſe les nombres reſtans du cube propoſé. Le quotient de cette diviſion eſt 3, que j'écris après les autres racines trouvées.

$$2 \mid \begin{matrix} 639 \\ 874 \end{matrix} \mid \begin{matrix} 007 \\ 8 \end{matrix} \mid (543$$

8°. *Il faut multiplier par ce caractere qu'on vient de connoitre, le triple du quarré des caracteres déja connus, & retrancher ce produit; outre cela prendre le quarré de ce caractere, & après l'avoir multiplié par le triple des autres caracteres connus, en ôter le produit de ce qui reste du nombre propoſé. De plus, il faut ôter le cube de ce caractere; s'il ne reſte rien, c'eſt une marque que le nombre propoſé étoit un nombre cube.*

Je multiplie le triple du quarré 54, qui eſt 8748, par 3; le produit de cette multiplication eſt 26244, que je retranche de 26390; il reſte encore 14607.

$$14 \mid 607$$

Je prens le quarré de 3, qui eſt 9, que je multiplie par le triple de 54, qui eſt 162; je retranche le produit de cette multiplication qui eſt 1458, de 1460, & il reſte encore 27.

Enfin je prens le cube de 3, qui eſt 27, que je retranche du reſte 27, par la même Régle, après quoi il ne reſte rien, ainſi 543 eſt la racine

ne cube de 160103007, & ce nombre eſt cube.

La preuve de cette operation ſe fait en multipliant la racine trouvée 543 *cubiquement. Si ſon produit eſt* 160103007, *l'operation a été bien faite.*

AUTRE EXEMPLE.

Le nombre propoſé eſt 216000 : après l'avoir coupé par tranches, j'extrais la racine de la premiere tranche

216 | 000

qui contient le nombre cube 216, dont la racine eſt 6, comme il ſe voit dans la Table ci-deſſus : je retranche ce cube, & il ne reſte rien de cette premiere tranche.

Je prens le quarré de 6 qui eſt 36, je le triple; ce triple eſt 108, par lequel voulant diviſer les chiffres précédens, je trouve que zero eſt le quotient, je le poſe pour le ſecond chiffre de la racine cherchée qui n'a que deux chiffres, puiſque ſon nombre cube n'a que deux tranches.

On voit évidemment que le nombre propoſé eſt cube, & que ſa racine eſt 60.

CHAPITRE IV.

De l'extraction des Racines des autres Puiſſances.

49 L'Extraction des racines des autres Puiſſances ſe peut faire auſſi facilement que de celles des ſecondes & troiſiemes puiſſances. La méthode qui vient d'être enſeignée le fait aſſez appercevoir. On voit par exemple, qu'ayant partagé un nombre quarré de quarré par tranches, de quatre caracteres en quatre caracteres, il y aura autant de caracteres dans la racine de ce

ce nombre qu'il y aura de tranches; que s'il y a trois tranches, cette racine aura trois chiffres, que le quarré de quarré du dernier chiffre ſera dans la derniere tranche. Comme ces extractions ne ſont gueres d'uſage, & que les operations de cette méthode ſeroient ennuyeuſes, l'on peut prendre un chemin plus court, en rappellant ces puiſſances aux quarrez & aux cubes. Pour concevoir comment cela ſe peut faire, il faut remarquer que toute grandeur qui peut être faite de deux grandeurs égales eſt quarrée, & que celle qui peut être faite de trois grandeurs égales multipliées cubiquement, eſt un cube; d'où il s'enſuit qu'une grandeur de 4 dimenſions, comme *bbbb*, peut être conſiderée comme un quarré, car elle peut être produite de *bb* multiplié par *bb*. Une grandeur de ſix dimenſions peut être auſſi conſiderée comme un quarré; car *bbb* multiplié par *bbb*, fait b^6. Une grandeur de neuf dimenſions peut être conſiderée comme un cube; car *bbb* multiplié cubiquement fait b^9: d'où il ſuit que toute puiſſance qui peut être diviſée par 2 ou par 3 exactement, peut être réduite à une moindre puiſſance, juſques à la premiere même, ſi on peut encore diviſer celle à laquelle elle eſt réduite par 2 ou par 3, de ſorte que le dernier quotient ſoit 1; ce qui ſe comprendra mieux par des exemples.

La grandeur b^{12}, qui a 12 dimenſions, peut être diviſée exactement par 2 & par 3, & je la puis conſiderer, ou comme un cube, ou comme un quarré; car *bbbb* multiplié cubiquement fait b^{12}; ou comme un quarré, car b^6 multiplié par lui-même, fait b^{12}. Ainſi en prenant la racine quarrée de cette grandeur, je la réduirai à une grandeur de ſix dimenſions. En pre-

prenant ſa racine cubique, je la réduirai à une grandeur de 4 dimenſions. Or en prenant la racine quarrée d'une 6e puiſſance, par exemple de b^6, on la réduit à une 3e, ſavoir à b^3, de laquelle ayant pris la racine cubique, on la réduit à la premiere. En prenant la racine quarrée d'une 4e puiſſance, on la réduit à une ſeconde, d'où ayant pris la racine quarrée, on la réduit à la premiere.

Pour tirer, ſelon cette méthode, la racine de la 9e puiſſance de ce nombre 512, puiſqu'une grandeur de 9 dimenſions peut être diviſée par 3, & être faite de la 3e puiſſance multipliée cubiquement, je prens la racine cube de 512 qui eſt 8, & enſuite la racine cube de 8 qui eſt 2; ainſi je connois que 2 eſt la racine de 512, conſideré comme une 9e puiſſance.

Il eſt bien évident qu'on ne peut pas en cette maniere réduire à une moindre puiſſance la 5e, la 7e, la 11e, la 13e, la 17e, la 19e puiſſance. On peut réduire la 10e à la 5e, en prenant la racine quarrée; la 14e à une 7e, en prenant encore ſa racine quarrée; la 15e à une 5e, en prenant ſa racine cubique: mais on ne peut pas les réduire à la premiere puiſſance. S'il étoit néceſſaire de le faire, il faudroit déduire de ce que nous avons enſeigné touchant l'extraction des racines quarrées & cubiques, ce que l'on doit faire pour extraire les racines de ces puiſſances. Si les grandeurs abſolues de ces puiſſances, c'eſt-à-dire celles dont elles ſont les puiſſances, étoient exprimées par pluſieurs chiffres, il faudroit des operations infinies; car l'on apperçoit bien, par exemple, qu'une 5e puiſſance doit ſe diviſer par tranches de cinq caracteres en cinq caracteres; que la 5e puiſſance du dernier chiffre de toute la racine, ſe trouveroit dans

dans la premiere place de la derniere tranche & dans les ſuivantes ; qu'entre la premiere place de cette tranche & la premiere place de la tranche précédente, il y auroit pluſieurs grandeurs de cinq dimenſions, comme il eſt facile de le connoître en faiſant monter une grandeur telle que $b+d$ à ſa cinquieme puiſſance, c'eſt-à-dire en la multipliant cinq fois par elle-même.

ELEMENS DES MATHEMATIQUES, OU TRAITÉ DE LA GRANDEUR EN GENERAL.

LIVRE TROISIEME.

Des Raisons ou Rapports que les Grandeurs ont entre elles.

SECTION PREMIERE.

Des Raisons ou Rapports en général.

CHAPITRE PREMIER.

On donne une idée de ce que c'est que Raison, & Proportion.

1 RApport & *Comparaison*, c'est presque une même chose. Considerer le rapport d'une chose avec une autre, c'est voir ce que l'une est quand on la compare avec l'autre. Comme si, en con-

considerant la taille d'un homme, en même temps je le compare avec une autre personne, ce qui me fait concevoir qu'il est grand, ou qu'il est petit; grand, si je le trouve d'une taille plus avantageuse que celui avec qui je le compare; petit, si sa taille est moins avantageuse. Ainsi ce mot, *Rapport*, ne signifie proprement qu'une maniere d'être d'une chose au regard d'une autre: ou pour parler plus juste, c'est la maniere qu'on conçoit qu'une chose est, en la rapportant à une autre. Nous jugeons le même homme grand ou petit, selon que nous le comparons avec telle & telle personne.

Le rapport ou la maniere d'être d'une chose s'appelle *Raison*, du nom Latin *Ratio*, dont la signification est fort étendue. Il se prend pour cette lumiere qui nous éclaire; il signifie aussi le rapport de deux ou plusieurs choses. Souvent dans les Auteurs Latins modernes on appelle un rapport *habitudo*, du verbe *habere*; ce qui est pris des Grecs, qui pour dire *ce que cette chose est au regard de celle-là*, disent ὡς ἴχει, &c. ce qu'on dit en Latin *ut ista res se habet*, &c. Je fais cette remarque, parce qu'il est très important d'avoir des idées bien nettes des mots qui sont d'usage dans les Sciences.

On ne compare ensemble que les choses qui sont d'une même espece; c'est toujours, selon ce qui se rencontre en elles, de plus ou de moins, d'égal ou de semblable. On compare les qualitez entre elles, les couleurs avec les couleurs, & on dit qu'elles sont plus ou moins claires. On compare le pere avec son fils, parce qu'il lui communique la même nature: il y a entre eux égalité de nature. Les rapports ou raisons, dont nous devons parler, sont ceux qui se font selon

la quantité. Il y a differentes eſpeces de quantité; il faut donc ajouter que ces rapports ſe font ſelon la même eſpece de quantité : car on ne dit point qu'une ligne ſoit plus grande ou plus petite qu'une ſurface, qu'un corps, qu'un eſpace de temps, ou qu'une quantité de mouvement ; ou qu'elle leur ſoit égale. Or quand on conſidere deux grandeurs de même eſpece, c'eſt-à-dire deux lignes, deux ſurfaces, deux corps, deux eſpaces de tems, deux quantitez de mouvement, deux poids, l'on n'y peut remarquer autre choſe, comme nous venons de voir, que de l'égalité ou de l'inégalité, de la petiteſſe ou de l'excès.

Les idées de ces mots, *égalité*, *inégalité*, *grand*, *petit*, enferment une comparaiſon, c'eſt-à-dire que ces mots ſignifient qu'on compare une grandeur. On dit qu'elle eſt égale ou inégale, petite ou grande, ſelon qu'on la rapporte à une telle ou telle grandeur. Tout ce que l'on peut donc dire des raiſons ou rapports des grandeurs, ſe réduit à ſavoir quand eſt-ce qu'elles ſont égales ou inégales, petites ou plus grandes. Mais cette égalité ou inégalité ſe peut concevoir en differentes manieres ; ce qui fait qu'on établit pluſieurs eſpeces de raiſons ou de rapports.

Les raiſons des grandeurs ſont leurs manieres d'être, ou ce qu'elles ſont au regard les unes des autres, égales ou inégales, petites ou plus grandes. Or l'égalité, l'inégalité, petiteſſe & grandeur de deux choſes qu'on compare, ſe peuvent conſiderer en deux manieres. 1°, En examinant de combien l'une ſurpaſſe l'autre, l'excès de l'une & le défaut de l'autre, en un mot leur difference. Comme ſi je compare ces deux nombres 5 & 9, je regarde que 9 eſt plus grand que 5, que ſon excès par deſſus 5 eſt 4, & que 4 eſt le défaut de-

de 5 au dessous de 9, ou que 4 est la difference de ces deux nombres. Il est certain qu'on considere ainsi très souvent les choses, lesquelles on compare, selon leur quantité. On dira de deux bâtons; celui-ci est plus grand que l'autre d'un pouce, de deux pouces.

2°. L'autre maniere de comparer deux grandeurs, est de ne pas considerer seulement leur difference; mais ce qu'elles sont entierement. Dans la premiere maniere on ne considere quasi que les extrémitez des choses. Pour me servir de l'exemple que j'ai proposé, en joignant deux bâtons, on en considere les extrémitez, & l'on voit que l'un est plus grand de quelques pouces, ou qu'il s'en faut quelques pouces que l'extrémité de l'autre n'atteigne son extrémité.

Dans la seconde maniere on considere comment une grandeur entiere est contenue dans une autre; si elle y est contenue tant de fois exactement ou non; ce qui fait qu'on dit qu'elle en est le tiers, le quart, &c. Cette maniere est la plus considerable; & quand on parle de *Rapport*, c'est elle qu'on entend. Quand on demande d'une grandeur ce qu'elle est au regard d'une autre, c'est la maniere qu'elle y est contenue, si elle en est la moitié, le tiers, le quart, &c. Aussi parmi les Mathématiciens le mot de *Raison*, quoiqu'il ne signifie que rapport ou maniere d'être, & que la premiere maniere dont nous venons de parler soit par conséquent une *raison* aussi-bien que la seconde, cependant dans l'usage, par ce mot on n'entend que la maniere dont une grandeur contient ou est contenue dans une autre; & pour distinction on appelle *Difference* la premiere maniere.

Comme on peut comparer une chose avec

toute autre lors qu'il y a lieu de le faire, aussi on peut comparer les comparaisons mêmes qu'on fait, c'est-à-dire un rapport avec un rapport, examinant si une chose est au regard d'une seconde ce qu'une troisieme est au regard d'une quatrieme ; si par exemple, Pierre est aussi petit au regard de Jacques, que Jean l'est au regard de François.

On appelle *Proportion* l'égalité, ou la similitude des Rapports. Il y a deux sortes de proportions, comme il y a deux sortes de rapports. L'égalité des differences s'appelle, *Proportion arithmetique*. Je ne sai point d'autre cause pour laquelle on lui a donné ce nom, si ce n'est qu'on la considere particulierement dans l'Arithmetique. Le rapport qu'on considere le plus dans les nombres, c'est leur difference, l'excès ou le défaut de l'un à l'égard de l'autre. On a nommé *Proportion géometrique* l'égalité des Raisons ; parce qu'effectivement on ne parle guere dans la Géometrie que de l'égalité des raisons.

Il faut se servir des noms que l'usage a établis ; mais il faut bien en marquer les véritables idées. Ce mot, *Raison*, ne signifie plus en général un rapport quel qu'il soit, puisqu'il conviendroit à la difference ou à la premiere maniere de comparer deux grandeurs. C'est une necessité d'entendre par ce mot un certain rapport, selon lequel on considere la maniere qu'une grandeur en contient une autre, ou qu'elle en est contenue. Quand il est impossible d'exprimer par nombre cette maniere, on appelle cela une *Raison sourde*.

Comme tout rapport, soit *Difference*, soit *Raison*, demande deux termes, aussi tout rapport de difference ou de raison demande quatre termes ; c'est à dire, qu'en comparant des raisons ou des differences on a quatre termes devant les yeux.

Mais

Mais un même terme peut servir deux fois; comme, en considerant que de même que 9 surpasse 5 de 4, de même 13 surpasse 9 de 4; ce qui est une proportion arithmetique. Ou comme, quand je considere que 2 est le tiers de 6, de même que 6 est le tiers de 18; ce qui est une proportion géometrique.

CHAPITRE II.

Définition & explication des termes dont on se doit servir.

Premiere Definition.

Lors que l'on compare deux grandeurs l'une avec l'autre, ces deux grandeurs sont nommées Termes de cette comparaison. Le premier terme s'appelle Antécédent, & le second Conséquent. 2

En comparant la grandeur A avec la grandeur B, on peut commencer par B aussi bien que par A: le premier terme est celui par lequel on commence, & qui s'écrit le premier. On pourroit commencer par celui qu'on a écrit le dernier; ainsi le même terme, de Conséquent, peut devenir Antécédent. Proprement l'Antécédent c'est la chose qu'on compare, & le Conséquent celle à qui on la compare.

Seconde Definition.

L'excés d'une grandeur par dessus une autre grandeur, s'appelle Difference. 3

L'excès de 7 par dessus 5 est 2. Ce nombre 2 est la difference de 7 & de 5.

Troisieme Definition.

La maniere dont une grandeur contient ou est 4

con-

contenue dans celle avec laquelle on la compare, ſe nomme Raiſon.

La maniere que 2 eſt contenu dans 6, & que 6 contient 2, s'appelle Raiſon de 2 à 6.

Quatrieme Definition.

5 *L'égalité des raiſons ou des differences, s'appelle Proportion.*

Cinquieme Definition.

6 *Proportion arithmetique, eſt une égalité de differences.*

La difference de 5 avec 3, eſt la même que celle de 10 avec 8; l'égalité de ces deux differences s'appelle Proportion arithmetique.

Sixieme Definition.

7 *L'égalité des raiſons ſe nomme Proportion géometrique, ou ſimplement Proportion.*

Les deux raiſons de 2 à 4 & de 3 à 6 étant égales, ces nombres ſont en proportion géometrique.

Septieme Definition.

8 *Chaque difference & chaque raiſon ſuppoſant deux termes, la proportion qui dépend de l'égalité des differences & des raiſons ſuppoſe par conſéquent quatre termes, dont le premier eſt nommé Premier Antécédent; le ſecond, Premier Conſéquent; le troiſieme, Second Antécédent; le quatrieme, Second Conſéquent.*

Je marque les Proportions arithmetiques avec trois points, les géometriques avec quatre au milieu des termes de la proportion.

Proportion Arithmetique, 5, 7 ∴ 10, 12;

9 C'eſt-à dire qu'il y a même difference entre 5 & 7, qu'entre 10 & 12.

Pro-

Proportion Géometrique, 3, 6 :: 4, 8.

C'eſt-à-dire que la raiſon de 3 à 6, eſt égale à celle de 4 à 8 ; que 3 eſt contenu deux fois en 6, comme 4 eſt contenu deux fois en 8.

HUITIEME DEFINITION.

Le premier & le dernier terme d'une Proportion s'appellent les Extrêmes de cette Proportion, & le ſecond & le troiſieme, ceux du Milieu, ou les Moyens. 9

Proportion Arithmetique, 5, 7 ·· 10, 12.

Ces deux nombres 5 & 12 ſont les Extrêmes de cette Proportion ; & 7 & 10, les Moyens.

Proportion Géometrique, 3, 6 :: 4, 8.

Ces deux nombres 3 & 8, ſont les Extrêmes dans cette Proportion, & 6 & 4 les Moyens.

NEUVIEME DEFINITION.

Un même terme peut ſervir de premier Conſéquent au premier Antécédent, & de ſecond Antécédent au ſecond Conſéquent ; ainſi trois grandeurs ſuffiſent pour faire une proportion. Pour-lors cette proportion eſt dite Continue, & la grandeur qui fait l'office de deux termes, eſt appellée Moyenne proportionnelle. 10

Proport. Arithm. Continue, 5, 7 ·· 7, 9.

Proport. Géometr. Continue, 2, 4 :: 4, 8.

Pour abreger on exprime cette proportion arithmetique avec une ligne entre deux points,

la Geometrique avec une ligne entre quatre points.

÷ 5, 7, 9. *Proportion Arithm. Continue.*

⁘ 2, 4, 8. *Proportion Géometr. Continue.*

Dixieme Definition.

11 *Si une proportion Continue a plus de trois termes; elle s'appelle Progreſſion.*

÷ 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, &c. *Progreſſion Arithm.*

⁘ 2, 4, 8, 16, 32, 64, &c. *Progreſſion Géometr.*

Onzieme Definition.

12 *Le premier & le dernier terme d'une progreſſion ſont appellez les Extrêmes, & on nomme Moyens ceux qui ſont entre ces Extrêmes.*

SECTION SECONDE.

DE LA PROPORTION ET PROGRESSION ARITHMETIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

Méthode pour connoitre les proprietez de la Proportion & Progreſſion Arithmetique.

SELON la Définition de la Progreſſion Arithmetique, il y a une même difference entre tous les termes, comme en celle-ci. 13

÷ *a b c d e f g h i k* &c.
÷ 1 3 5 7 9 11 13 15 17 19

La difference de *b* avec *a* eſt 2 : celle de *c* avec *b* eſt encore 2 ; ainſi de ſuite : d'où il eſt évident que puiſque le ſecond terme *b* n'eſt que le premier *a* augmenté de la difference qui regne dans cette progreſſion, connoiſſant le premier terme *a* avec la difference de la progreſſion, on connoitra *b* avec lequel on connoitra *c*, qui ne differe de *b* que parce qu'il a par deſſus lui une grandeur connue. Ainſi on connoitra tous les autres termes de cette progreſſion, fuſſent-ils infinis en nombre.

Les choſes ne ſont obſcures que parce que nous ne les enviſageons, pour ainſi dire, que par un endroit qui n'eſt point éclairé, ou que nous ne tâchons point d'ôter de certains voiles qui les

cachent & les font paroître differentes de celles que nous connoiſſons. Le ſecret des Sciences c'eſt de dévoiler les choſes, & de les faire paroître telles qu'elles ſont : que ce qu'elles ont de ſemblable paroiſſe, & qu'en même tems on apperçoive & qu'on diſtingue bien tout ce qui fait leur difference. Dans cette progreſſion que nous venons de propoſer, comme dans toutes les autres, ces termes paroiſſent tous differens ; & de la maniere que je les ai exprimez vous ne voyez point en quoi ils ſont conformes, & en quoi ils different. Puiſque deux termes qui ſe ſuivent ne ſont differens que par une certaine grandeur, dont l'un eſt plus grand & l'autre plus petit, il eſt évident que l'un plus ou moins cette grandeur doit être égal à l'autre. b eſt different de a, parce qu'il eſt plus grand que a de deux unitez. Si je nomme donc x ces deux unitez, il faut que $a + x$ ſoit égal à b. Ainſi $a + x = b$, ou $b - x = a$. Par la même raiſon $b + x = c$, ou $c - x = b$. De même de tous les autres termes.

Par conſéquent il eſt facile d'exprimer toute cette progreſſion, de maniere qu'on voye dans tous ſes termes ce qu'ils ont de commun, & en quoi ils different. Car puiſque $a + x = b$, donc au lieu de b je pourrai écrire $a + x$: Et puiſque $b + x = c$ donc $a + x + x$, ou $a + 2x = c$, & par la même raiſon $a + 3x = d$; je réduis donc la progreſſion propoſée à celle-ci, qui eſt la même ; je n'en change que les expreſſions.

$\div a. a+x. a+2x. a+3x. a+4x. a+5x. a+6x.$
1 3 5 7 9 11 13 &c.

Avec cela ſeul nous allons découvrir & démontrer toutes les proprietez des Proportions & Progreſſions arithmetiques. Ce que je viens de dire

dire en plusieurs paroles, je le renfermerai dans la Proposition suivante.

LEMME.

Dans une Proportion Arithmetique l'antécédent 14
plus ou moins sa difference d'avec son conséquent, est égal à son consequent.

Soit b l'antécédent, d le conséquent, c leur difference. Si b surpasse d de la grandeur c, il est bien évident qu'ajoutant à d ce qui lui manquoit, ou retranchant de b l'excès qu'il a par dessus d, ces deux grandeurs seront égales, $d+c=b$, ou $b-c=d$. Si au contraire b est plus petit que d de la grandeur c, ajoutant à b ce qui lui manque, $b+c=d$, ou retranchant de d ce qu'il y a par dessus b, alors on fait $b=d-c$. Si dans cette progression $\div$ 1. 3. 5. 7. &c. la difference est 2, il est évident que $1+2=3$ & $3+2=5$, ou que $3-2=1$ & $5-2=3$.

COROLLAIRE I.

De là il s'ensuit qu'on peut exprimer en la ma- 15
niere suivante deux termes, dont on connoit la difference.

Si $b+c=d$, ou si $b-c=d$, par-tout où se trouvera d je pourrai substituer $b+c$ ou $b-c$, selon que b sera ou plus grand ou plus petit que d. Pour abreger je supposerai, dans les Démonstrations suivantes, que le conséquent d est toujours plus grand que l'antécédent b; s'il étoit plus petit, il ne faudroit que changer le signe $+$ en $-$.

COROLLAIRE 2.

On peut marquer tous les differens termes d'une 16

Progression arithmetique, de maniere qu'ils ayent presque le même nom.

Soit cette Progression ÷ *b. d. f. g. h. &c.* je suppose que la difference qui regne entre tous ces termes est *c*. Ainsi $b+c=d$: & puisque *f* surpasse *d* de *c*, il faut que $b+c+c$, ou $b+2c=f$, par la même raison $b+3c=g$, & $b+4c=b$; ainsi cette progression se trouve réduite à celle-ci : ÷ *b*, $b+c$. $b+2c$. $b+3c$. $b+4c$. &c. Ainsi cette progression ÷ 1. 3. 5. 7. 9. 11. &c. peut être changée en celle-ci : ÷ $1.1+2.1+4.1+6..1+8..1+10$.

CHAPITRE II.

Propositions touchant les proprietez des Proportions & Progressions Arithmetiques.

Premiere Proposition.

Theoreme 1.

17 *Dans une Proportion arithmetique, la somme des Extrêmes est égale à celle des Moyens.*

Soient en Proportion arithmetique ces quatre termes *b. d* ∴ *e. f.* ou 3. 5 ∴ 7. 9. il faut démontrer que l'addition de *d* avec *e*, qui sont les Moyens, fait une somme égale à celle de *b* & de *f*, qui sont les Extrêmes de cette proportion, c'est-à-dire que $b+f=d+e$, ou que $3+9=5+7$.

Soit la difference de *b* à *d* nommée *c*, qui sera aussi par la définition de cette proportion, celle de *e* avec *f*. Donc *sup.* n. 15. $b+c=d$, & $e+c=f$; ainsi les quatre termes de cette Proportion se peuvent réduire à cette expression

b. b

$b. b+c :: e. e+c$. Il faut donc démontrer que le premier terme b, plus le dernier qui eſt $e+c$, ſont égaux au ſecond terme $b+c$, plus le troiſieme terme qui eſt e, c'eſt-à-dire que $b+e+c=b+c+e$; ce qui eſt évident, puiſque les grandeurs ſont les mêmes de part & d'autre. Cette proportion 3. 5 :: 7. 9. étant changée en celle-ci qui eſt la même, 3. 3 + 2 :: 7. 7 + 2. il eſt évident que les Moyens 3 + 2 + 7. ſont la même choſe que les Extrêmes 3 + 7 + 2.

COROLLAIRE I.

18 *Dans une Progreſſion arithmetique, l'addition de deux termes également éloignez des deux Extrêmes, eſt égale à celle des Extrêmes.*

Soit cette progreſſion ÷ *b. c. d. e. f.* ces termes c & e ſont également éloignez des Extrêmes b & f. Je dis que $c+e$ eſt égal à $b+f$, ce qui eſt évident; car il y a même difference entre b & c qu'entre e & f, ſelon la définition de la progreſſion: Donc ces quatre grandeurs ſont en proportion $b. c :: e. f$. Ainſi par ce Theoréme $b+f=c+e$; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE 2.

19 *Dans une Proportion continue, & de même dans une Progreſſion dont le nombre des termes eſt impair, le terme du milieu ajouté à lui-même, eſt égal à l'addition des Extrêmes.*

Soient ÷ *b. c. d.* une proportion continue, qu'on peut auſſi regarder comme ſi c'étoit une progreſſion. Le terme du milieu de cette progreſſion eſt c, lequel terme tient lieu de deux termes; ſavoir de Conſéquent à b, & d'Antécédent à d, par les définitions de la proportion

continue, ou de la progreſſion. On peut donc conſiderer ce ſeul terme comme deux termes Moyens, qui avec b & avec d font cette proportion, qui a quatre termes, $b.c :: c.f$: Or par ce Theorême $b+d=c+c$, ou $b+d=2c$, qui eſt ce qu'il falloit prouver.

Seconde Proposition.

Second Theorême.

20 *En toute Progreſſion arithmetique chaque terme renferme le premier, & outre celà autant de fois la difference qui regne dans cette Progreſſion, qu'il y a de termes avant lui.*

Soit b le premier terme d'une Progreſſion arithmetique, de tant de termes qu'on voudra. Si la difference qui regne eſt x; le premier terme étant b, le ſecond ſera $b+x$, le troiſieme $b+2x$; ainſi de ſuite *ſup.* n. 16. Si la progreſſion eſt de ſix termes, le ſixieme ſera $b+5x$, qui renferme le premier b, & outre cela autant de fois la difference x qu'il y a de termes avant lui, ſavoir 5, comme il eſt évident.

Troisieme Proposition.

Troiſieme Theorême.

21 *Ayant retranché le premier terme du dernier, le reſte eſt égal au produit, fait de la difference qui regne dans la progreſſion par le nombre des termes qui précédent le dernier terme.*

Soit b le premier terme, & $b+5x$ le dernier, & ayant retranché b de $b+5x$, le reſte eſt $5x$, qui, comme on voit, eſt le produit de x difference, multipliée par 5, nombre des termes qui précédent ce dernier terme $b+5x$. Donc, &c.

QUA-

QUATRIEME PROPOSITION.
Premier Problême.

Connoiſſant les trois premiers termes d'une Proportion arithmetique, connoître le quatrieme. 22

Soient en proportion arithmetique ces quatre termes $a.b :: c.x$, dont les trois premiers ſont connus. On cherche x le quatrieme. On connoit la difference du premier avec le ſecond. Que ce ſoit d. la difference du troiſieme avec x eſt la même que celle de a avec b. Ainſi puiſque $a + d = b$, de même $c + d = x$, & partant x n'eſt plus inconnu.

Ces trois nombres donnez 10, 15, 13, ſont les trois premiers termes d'une proportion arithmetique dont on cherche le quatrieme terme, c'eſt-à-dire un nombre qui ait le même excès par deſſus 13, que 15 a par deſſus 10. Cela ſe trouve en deux manieres.

Il faut ajouter à 13 la difference qui eſt entre 10 & 15, ſavoir 5. Par la définition de la proportion le nombre 13, avec cette difference, ſera le quatrieme terme qu'on cherche, comme il eſt évident. Ou ce qui eſt la même choſe, il faut ajouter les termes Moyens 15 & 13 en une ſomme, de laquelle ayant retranché le premier terme 10, ce qui reſtera ſera le quatrieme terme, puiſque par la premiere Propoſition *ſup.* n. 17. ce quatrieme terme ajouté au premier, égale la ſomme des Moyens; ainſi ayant ajouté 13 avec 15, ce qui fait 28, & en ayant retranché le premier terme 10, le reſte qui eſt 18, ſera le quatrieme terme proportionnel aux trois donnez.

CINQUIÉME PROPOSITION.
Second Problême.

23 *Continuer une Progreſſion arithmetique, dont on connoit le premier terme, & la difference qui eſt entre le premier & le ſecond.*

Soit le premier terme b, ſa difference d'avec le ſecond eſt c. Chaque terme ſurpaſſe celui qui le precede de cette difference, ſelon la définition de la progreſſion; donc ſi le premier eſt b, le ſecond ſera $b+c$, le troiſieme $b+2c$, le quatrieme $b+3c$; ainſi de ſuite, ajoutant toujours la difference avec le précédent.

SIXIEME PROPOSITION.
Troiſieme Problême.

24 *Connoiſſant le premier terme d'une progreſſion avec le dernier, & combien elle a de termes, connoitre la difference qui regne dans cette progreſſion.*

Soit b le premier terme d'une progreſſion, & f le dernier, le nombre des termes eſt n, il faut trouver la difference x qui eſt inconnue. Ayant retranché b de f, le reſte $f-b$ eſt égal *ſup.* n. 21. à $nx-ix$ produit de x difference par $n-i$, nombre des termes qui précédent le dernier; partant diviſant $f-b$ par $n-i$, le quotient de cette diviſion ſera la difference qu'on cherche. L. 2. n. 30.

QUESTION.

Une perſonne diſtribue pendant huit jours quelque aumône à des pauvres; le premier jour elle leur donne 5 ſols, le dernier jour 26, & chaque autre jour un certain nombre plus que le

le précédent, augmentant tous les jours également; on demande de combien elle a augmenté, ou combien elle a donné chaque jour. On voit bien que ces aumônes de chaque jour font une progreſſion dont le premier terme & le dernier ſont connus, & en même tems combien cette progreſſion a de termes, ſavoir 8: il ne s'agit donc que de connoitre la difference. Le premier terme de cette progreſſion eſt 5. le huitieme terme eſt 26. Pour ſatisfaire à la queſtion, il faut ôter 5 de 26, le reſte 21 par le Theorême troiſieme, eſt le produit de la difference qui regne dans la progreſſion, multipliée par 8 — 1 ou 7, nombre des termes qui précédent le dernier, lequel dernier terme eſt ici le huitieme. Diviſant donc 21 par 7, le quotient 3 de cette diviſion ſera la difference qu'on cherche; Ainſi cette perſonne a donné le ſecond jour 8 ſols, le troiſieme 11 ſols, &c.

Septieme Proposition.

Quatrieme Problême.

Le premier & le dernier terme étant donnez avec la difference, trouver combien la progreſſion a de termes.

Soit b le premier terme, le dernier eſt f, la difference qui regne dans cette progreſſion ſoit d: Je nomme z le nombre des termes de cette progreſſion qui eſt inconnue. Selon le Theorême *ſup.* n. 21. ayant retranché b du dernier f, ce qui reſtera, ſavoir $f - b$, ſera égal à $zd - id$ produit de la difference d, multipliée par $z - i$, nombre des termes qui précédent le dernier terme. Diviſant donc $f - b$ égal à $zd - id$, par d, le quotient $\frac{f-b}{d}$ ſera le nom-

bre des termes qui précédent f, pour lequel dernier terme f ajoutant i au quotient $\frac{f-b}{d}$, ainsi $\frac{f-b}{d} + i = z$, on aura le nombre des termes de toute la progression : ce qu'on demandoit.

QUESTION.

Un Marchand empruntant de l'argent d'un Usurier, s'est engagé de lui payer le premier mois 4 écus, le second 4 écus, plus 2, c'est-à-dire 6. ainsi de suite en progression arithmetique. Il se trouve que le dernier mois il paye 22 écus d'interêts ; on demande combien il s'est écoulé de mois, c'est-à-dire combien cette progression a de termes. Par cette septieme Proposition on trouvera qu'il y en a dix : car ôtant le premier terme 4 du dernier 22, reste 18. qui divisé par la difference 2 donne 9 au quotient pour le nombre des termes qui sont avant le dernier, pour lequel dernier terme ajoutant 1 au nombre 9 des neuf autres qui le précédent, on a 10 pour le nombre de tous les termes de la progression.

HUITIEME PROPOSITION.
Cinquieme Problême.

26 *Le premier & le dernier terme d'une Progression arithmetique étant connus, avec la difference ou avec le nombre des termes, connoitre tous les termes interposez.*

Soit b le premier terme, & f le dernier : Si avec cela la difference qui regne dans la progression est connue, on connoitra aisément tous les autres termes *sup.* n. 23. Mais si c'est le nombre des termes seulement qu'on connoit, il faut alors chercher la difference qu'on trouvera par le Problême troisieme *sup.* n. 24. & par même moyen on connoitra toute la progression.

NEU-

NEUVIEME PROPOSITION.

Sixieme Problême.

Le premier terme d'une Progreſſion étant donné, 27
avec la difference qui y regne, trouver un terme propoſé de cette Progreſſion.

Soit b le premier terme, la difference eſt d: c'eſt le ſeptieme terme que l'on cherche. Pour le trouver il faut multiplier la difference par le nombre des termes qui le précédent, c'eſt-à-dire d par b, puiſque c'eſt le ſeptieme terme qu'on cherche; le produit eſt $6d$, auquel il faut encore ajouter le premier terme b, & on aura par le ſecond Theorême *ſup.* n. 20. $6d+b$, ou $b+6d$ pour ſeptieme terme de la progreſſion propoſée; ce qu'on cherchoit.

QUESTION.

Un Jardinier a cueilli des pommes d'un pommier pendant douze années; la premiere année il a cueilli 5 pommes, la ſeconde 60 plus que la premiere, la troiſieme 60 plus que la ſeconde, ainſi de ſuite juſqu'à la douzieme année. L'on demande combien il a cueilli de pommes la douzieme année? Le nombre des pommes cueillies chaque année fait une progreſſion arithmetique, dont le premier terme eſt 5, & la difference qui regne dans la progreſſion eſt 60. Ainſi ſelon cette neuvieme Propoſition, le douzieme terme doit être 665.

DIXIEME PROPOSITION.

Septieme Problême.

Le premier terme d'une Progreſſion étant donné, 28
& la difference qui y regne, connoître le quantieme terme de cette Progreſſion eſt un certain nombre propoſé.

Le premier terme de la progreſſion propoſée eſt b, la difference d, & $b+6d$ eſt un de ſes termes dont on demande la place dans cette progreſſion. Il faut d'abord en retrancher b le premier terme, enſuite il faut voir combien la difference d eſt de fois dans le reſte $6d$: elle y eſt 6 fois. Donc par le Theorême *ſup.* n. 20. le terme $b+6d$ eſt le ſeptieme de la progreſſion, puiſqu'il contient une fois le premier terme plus 6 fois la difference d.

QUESTION.

Il y a une rangée d'arbres, on ſait que ſur le premier il y a 4 colombes, ſur le ſecond il y en a 6; ainſi de ſuite en progreſſion arithmetique. Il y a un arbre ſur lequel il y en a 22; on demande le quantieme eſt cet arbre. Par cette Propoſition on trouvera qu'il eſt le dixieme.

ONZIEME PROPOSITION.

Problême huitieme.

29 *La difference, le nombre des termes, & le dernier terme étant donnez, trouver le premier terme.*

Soit y le premier terme qu'on cherche, le dernier eſt f, la difference eſt d, & n le nombre des termes. Par le ſecond Theorême *ſup.* n. 20. le dernier terme f eſt égal à $y+nd-1d$. Otant donc $nd-1d$, produit de la difference d par $n-1$ nombre des termes qui ſont avant le dernier f; ôtant, dis-je, ce produit du dernier terme f, le reſte ſera par conſéquent la valeur du premier terme y que l'on cherche.

QUESTION.

Une perſonne a dépenſé de l'argent pendant 10 jours. Chaque jour elle a dépenſé 2 ſols plus que le jour précédent; & le dernier jour elle en a dépenſé 22. On demande, combien de ſols

ſols cette perſonne à dépenſé le premier jour & chacun des ſuivans? On connoit la difference, le nombre des termes, & le dernier terme de cette progreſſion; ainſi par cette onzieme Propoſition, on trouvera que le premier jour cette perſonne avoit depenſé 4 ſols, & le ſuivant 6 ſols. Ainſi de ſuite.

Douzieme Proposition.

Quatrieme Theorême.

En toute progreſſion la ſomme des deux Extrêmes multipliée par la moitié du nombre de tous les termes, eſt égale à la ſomme de tous les termes. 30

Soit cette progreſſion $\div b, c, d, f, g, h, k, l, m, n, p, q$.

Nous avons prouvé *ſup.* n. 18. que dans une progreſſion arithmetique, la ſomme de deux termes également éloignez des Extrêmes, eſt égale à celles des Extrêmes : ainſi tous les moyens étant pris deux à deux ſont des ſommes égales $c+p=d+n=f+m=g+l$, &c. Donc comme il y a ici douze termes, ſix fois la ſomme des Extrêmes eſt égale à la ſomme de tous les termes. Par conſéquent la ſomme des Extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes, eſt égale à la ſomme de tous les termes.

$$b+q = \begin{cases} c+p \\ d+n \\ f+m \\ g+l \\ b+k \end{cases}$$

Corollaire I.

Si le nombre des termes d'une Progreſſion eſt impair, leur ſomme entiere eſt égale au produit du Moyen multiplié par le nombre de tous les termes. 31

Car ſi la ſomme des deux Extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes, eſt égale à la ſomme de tous ces termes, la moitié de la ſomme des Extrêmes multipliée par le nombre entier de tous les termes, doit être égale à la ſomme de

tous

tous les termes. Or le Moyen vaut la moitié de la somme des Extrêmes, puisqu'ajouté à lui-même il vaut cette somme, *sup* n. 10. donc; &c. Soit retranché de la progression précédente le terme q, de sorte qu'il ne reste plus qu'onze termes dont le moyen est b. Alors $b + b$, ou $2b = b + p$; donc multipliant b par 11, le produit $11b$ sera égal à la somme de tous ces onze termes.

Corollaire 2.

32 *Dans une Progression arithmetique dont le premier terme est zero, si on multiplie le dernier z par x, nombre des termes de la Progression, le produit qu'on aura sera le double de la somme de tous les termes.*

Le dernier terme z, avec zero le premier terme, ce qui ne fait que z, étant multiplié par la moitié de x nombre des termes, est égal à la somme de tous les termes de cette Progression; donc multiplié par tout x, il est le double de toute cette somme. C'est-à-dire que xz est le double de toute la progression.

Treizieme Proposition.
Cinquieme Theorême.

33 *Une Progession arithmetique peut être continuée à l'infini, en montant. Elle ne le peut en descendant, si ces termes ne sont des grandeurs négatives.*

Ajoutant à un terme d'une progression la difference qui regne dans la progression, on a le terme suivant: ainsi on la peut augmenter ou continuer à l'infini, en montant. Mais on ne le peut faire en descendant, si ces termes sont des grandeurs positives. Car soit cette progression $= o. a. b. c.$ qu'on ait continué en descendant, jusques à ce que x difference qui regne

dans

dans la progreſſion ſoit telle que $a-x=0$: je dis qu'on ne peut pas trouver un terme au deſſous de a, & plus grand que 0. Si on ſuppoſe que z eſt ce terme, alors $z+x=a$; partant $z=a-x$. Or $a-x=0$; donc $z=0$, & par conſéquent z n'eſt pas plus grand que zero.

Mais ſi dans une progreſſion arithmetique il y a des grandeurs négatives, elle peut être continuée en montant & en deſcendant. Soit une progreſſion dont 1 eſt la difference, il eſt évident qu'il y a même difference entre $0+1$. qu'entre $0-1$, ſavoir la valeur de 1. Ainſi cette progreſſion peut être augmentée à l'infini, ſoit en montant, ſoit en deſcendant, $\div 3.2.1.0.-1.-2.-3.$ &c.

QUATORZIEME PROPOSITION.
Problême neuvieme.

Le premier terme, la difference & le nombre des termes étant donnez, trouver la ſomme de la progreſſion. 34

Il faut trouver le dernier terme par le moyen du ſixieme Problême *ſup.* n. 27. & l'ayant ajouté au premier, on aura la ſomme des extrêmes, qui étant multipliée par la moitié du nombre des termes, on aura par le Theorême *ſup.* n. 30. la ſomme de toute la progreſſion; ce qu'on demandoit.

Quand le nombre des termes eſt impair, il faut chercher la valeur du moyen. Par exemple, ſi le nombre des termes étoit onze, le terme moyen eſt le ſixieme terme dont il auroit fallu chercher la valeur par la Propoſition *ſup.* n. 27; enſuite multiplier ce moyen par le nombre entier des termes de la progreſſion, le produit ſeroit la ſomme de tous les termes de la progreſſion, par le premier Corollaire de la Propoſition douzieme *ſup.* n. 31. QUES-

QUESTION.

Un Capitaine a rangé ſes Soldats de maniere qu'au premier rang il y a trois Soldats, au ſecond 5; il y a 12 rangs. On demande combien il y a de Soldats? c'eſt-à-dire quelle eſt la ſomme de cette progreſſion? Par cette quatorzieme Propoſition cette ſomme eſt 168.

QUINZIEME PROPOSITION.
Problême dixieme.

35 *La difference, le nombre des termes, & la ſomme de la progreſſion étant donnez, trouver les deux Extrêmes, & chacun des interpoſez.*

La difference eſt c qui vaut 2, le nombre des termes eſt 12, la ſomme de la Progreſſion eſt 168. Soient x & z les extrêmes qu'il faut trouver avec leurs interpoſez. Puiſque par la Propoſition *ſup.* n. 30. la ſomme des Extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes, eſt égale à la ſomme de toute la progreſſion; donc diviſant la ſomme de la progreſſion par la moitié du nombre des termes, le quotient ſera la ſomme des Extrêmes. Ainſi ayant diviſé 168 par 6, moitié de 12, nombre des termes, le quotient 28 eſt égal à x le premier terme plus z le dernier; ce qui s'exprime $28 = x + z$, & par la ſeconde Propoſition *ſup.* n. 20. $x + 11c$. ou $x + 22 = z$. Donc $28 = x + z + 22$. Otant de part & d'autre 22, reſtera $6 = x + z$. Donc $3 = x$. Ainſi le premier terme eſt 3. Mais $x + 22 = z$: Donc $z = 3 + 22$, ou $z = 25$. La difference qui regne dans la progreſſion eſt connue, ſavoir c ou z; donc le ſecond terme ſera 5, le troiſieme ſera 7. &c.

QUESTION.

Une fontaine artificielle a 12 jets d'eau differens,

rens, le ſecond jette dans une heure deux pintes d'eau plus que le premier, le troiſieme deux pintes plus que le ſecond, & ainſi de ſuite, & tous enſemble jettent 168 pintes d'eau dans une heure. L'on demande combien chacun des jets de cette fontaine jette d'eau dans une heure.

L'on connoit la difference qui regne dans cette progreſſion, ſavoir 2, le nombre des termes qui eſt 12, la ſomme de tous les termes qui eſt 168; ainſi par cette quinzieme Propoſition, on trouvera que le premier jette dans une heure trois pintes d'eau, le ſecond cinq pintes, le troiſieme ſept pintes; ainſi de ſuite.

SEIZIEME PROPOSITION.

Problême onzieme.

Connoiſſant le nombre des termes d'une Progreſſion arithmetique, & leur ſomme avec le premier ou le dernier terme, connoitre le reſte. 36

Le nombre des termes eſt n, leur ſomme eſt f. Soit x le premier ou le dernier terme qu'on ne connoit pas. Il faut en premier lieu diviſer la ſomme f par la moitié de n nombre des termes. Le quotient de cette diviſion, ſelon ce qui a été démontré dans la Propoſition précédente, ſera la ſomme du premier & du dernier terme; d'où ôtant le premier le reſte ſera le dernier, ou ôtant le dernier le reſte ſera le premier, comme il eſt évident. Enſuite on trouvera la difference par le Problême *ſup.* n. 24. laquelle étant une fois connue, on trouvera aiſément tout le reſte de la progreſſion.

QUESTION PREMIERE.

Un débiteur eſt obligé de payer la premiere ſemaine une livre, la ſuivante quatre livres, la troiſieme ſept livres; ainſi chaque ſemaine trois livres plus

plus que dans la précédente. On demande combien il doit payer la vingt-huitieme ſemaine.

Dans cette progreſſion le nombre des termes eſt connu, la difference qui y regne, & le premier terme. Par la neuvieme Propoſition on trouvera que la ſomme qu'il doit payer eſt 82 livres. Car multipliant 27, nombre des termes qui précédent celui qu'on cherche par 3 difference qui regne dans la progreſſion, le produit eſt 81, auquel ajoûtant le premier terme 1 cela fait 82, qui eſt le 28e terme.

Question Seconde.

Un débiteur ayant payé 82 *livres la vingt-huitieme ſemaine, & payé trois livres moins dans la ſemaine précédente, ſavoir la vingt-ſeptieme, & toujours de même en rétrogradant, on demande combien il a dû payer à la fin de la premiere ſemaine.*

Le nombre des termes qui précédent le 28, ſavoir 27 multiplié par la difference 3, c'eſt-à-dire 81 plus le premier terme, eſt égal à 82, ſelon qu'on l'a vu dans la Queſtion précédente: Donc de 82 ôtant 81, le reſte 1 ſera le premier terme qu'on demande, ou ce que le débiteur a payé à la fin de la premiere ſemaine.

Question Troisieme.

Un débiteur doit pendant 28 *ſemaines payer à la fin de chacune une certaine ſomme, qui croît également chaque ſemaine; la premiere il a payé une livre, la derniere* 82 *livres: on demande quelle eſt cette augmentation, c'eſt-à-dire quelle eſt la difference qui regne en cette progreſſion.*

Otez de 82 dernier terme le premier 1, reſte 81; diviſez ce nombre par le nombre des termes moins 1, par conſéquent par 27, le quotient

tient 3 marquera cette difference, ſelon ce qu'on vient de voir dans les deux Queſtions précédentes.

Question Quatrieme.

Un débiteur a payé la premiere ſemaine une livre, la ſeconde 4, *la troiſieme* 7, *de ſorte que la difference de la progreſſion eſt* 3; *à la fin de la derniere ſemaine il a payé* 82: *on demande le nombre de ces ſemaines.*

Le dernier payement & le dernier terme de la progreſſion eſt 82; dont j'ôte le premier terme, reſte 81, que je diviſe par 3 difference de la progreſſion: le quotient de la diviſion eſt 27: ainſi il y a 27 + 1 termes, c'eſt-à-dire 28: ce qu'on demandoit.

Question Cinquieme.

Le débiteur doit payer pendant vingt-huit ſemaines à la fin de chacune un certain prix croiſſant de 3 *livres: à la fin de la premiere il a payé* 1, *& à la fin de la vingt-huitieme* 82: *on demande combien il a payé en tout.*

Le premier & le dernier terme 1 + 82 multipliez par la moitié du nombre des termes, ſont égaux à la ſomme de tous les termes de la progreſſion *ſup.* n. 30: multipliant donc 1 + 82 ou 83 par 14, puiſqu'il y a 28 termes; le produit 1162 eſt la ſomme que l'on demande.

Question Sixieme.

Un débiteur doit payer 1162 *livres en un certain nombre de ſemaines, il a payé la premiere ſemaine* 1 *livre, & la derniere* 82, *payant en chacune plus qu'en la précédente dans la même Proareſſion*

raiſon ſe peut faire en deux manieres : ainſi on ne donne pas une idée entiere de ce que c'eſt que Raiſon, ſelon qu'on prend ce mot.

On a vu que l'on peut comparer deux grandeurs l'une avec l'autre, ou en conſiderant leur difference, ou examinant comment l'une contient l'autre, ou en eſt contenue. Ainſi pour donner une idée diſtincte des Raiſons, c'eſt-à-dire des rapports des Grandeurs, entant qu'on veut parler d'un rapport qui ne conſiſte pas dans la difference de deux grandeurs qu'on rapporte l'une à l'autre, il faut néceſſairement dire que Raiſon c'eſt une maniere de contenir, ou d'être contenu.

Ce qui a trompé pluſieurs perſonnes, & leur a fait rejetter cette notion que nous donnons ici des Raiſons, c'eſt qu'ils ſe ſont imaginés que les Raiſons ainſi expliquées, ne pouvoient s'appliquer qu'aux Grandeurs, dont l'une contient l'autre ou en eſt contenue exactement tant de fois, & qu'on peut exprimer par nombres. Il y a, diſent-ils, & ils ne ſe trompent pas en cela, une infinité de Grandeurs dont on ne peut pas dire que l'une ſoit contenue un certain nombre de fois dans l'autre : ainſi, comment dire que la raiſon qu'elles ont entre elles eſt la maniere dont elles ſe contiennent, puiſque cette maniere eſt inconnue, & qu'il eſt impoſſible de l'exprimer ? Ce qu'on peut donc dire de leur raiſon, c'eſt que l'une a un rapport à l'autre.

Voila tout ce qu'ils peuvent dire contre la notion que je donne des Raiſons, mais cela n'a aucune force ; car bien que je ne connoiſſe point la maniere préciſe qu'une Grandeur eſt contenue dans une autre, cela n'empêche pas que je ne puiſſe démontrer les proprietez des Raiſons & des Proportions géometriques, ſuivant cette notion

tion que je donne des Raiſons. Si je ſai que *b* eſt contenu dans *c* comme *d* dans *f*, ſans pourtant ſavoir ſi c'eſt exactement ou avec reſte; ſuivant la définition des Proportions je ſaurai certainement que ces quatre termes *b. c. d. f.* ſont proportionnels: Ignorant, dis-je, la maniere dont *b* eſt contenu dans *c*, je pourrois faire voir que *d* eſt à *f* comme *b* à *c*. ſi j'avois un moyen de démontrer qu'effectivement *d* eſt contenu dans *f* comme *b* l'eſt dans *c*. Il ne ſeroit pas néceſſaire que je puſſe dire préciſément cette maniere, que par exemple *b* eſt le tiers de *c* comme *d* eſt le tiers de *f*. Il ſuffiroit que je fiſſe voir que ſi on ſuppoſoit *c* & *f* diviſez en mille parties, ſi *b* étoit une millieme partie de *c*, *d* ſeroit auſſi une millieme partie de *f*; & que ſi diviſant *c* par *b* il reſtoit un reſte, diviſant *f* par *d* il y auroit auſſi un reſte; & que ſi on concevoit ce reſte de *c* diviſé en mille parties, & le reſte de *f* diviſé auſſi en mille parties, *b* ſeroit à chaque millieme partie du reſte de *c* comme *d* à la millieme partie du reſte de *f*; ainſi à l'infini. Lors, dis-je, que cela ſe peut démontrer, il eſt évident que la maniere dont *d* eſt contenu dans *f* eſt la même que celle dont *b* eſt contenu dans *c*; ainſi cette définition des Raiſons, que ce ſont des manieres de contenir ou d'être contenu, convient à toutes les Raiſons, tant à celles qu'on peut exprimer par nombre, qu'à celles qui ne le peuvent. Il n'eſt pas même néceſſaire d'ajouter dans la définition des Raiſons, qu'il faut, afin que deux Raiſons ſoient ſemblables, que ſi on diviſe le premier & le ſecond Antécédent en mille parties, & que le premier Conſéquent ſoit une millieme

partie du premier Antécédent, le ſecond Conſéquent ſoit auſſi une millieme partie du ſecond Antécédent; & que ſi le premier Conſéquent ſe trouve plus petit qu'une millieme partie du premier Antécédent, le ſecond Conſéquent ſe trouve auſſi plus petit qu'une millieme partie du ſecond Antécédent. Car ſi cela n'étoit pas, les deux manieres de contenir ou d'être contenu ne ſeroient pas les mêmes. Une définition doit être courte & nette. Nous démontrerons dans ces Elémens tout ce qu'on peut démontrer touchant les Raiſons des Grandeurs en général, ſans avoir beſoin de cette addition.

CHAPITRE II.

Explication des termes dont on ſe doit ſervir.

PREMIERE DEFINITION.

37 *RAiſon de deux Grandeurs étant la maniere que l'une eſt contenue dans l'autre, ou qu'elle la contient, ſi cette Raiſon ſe peut exprimer par un nombre, elle eſt appellée exacte ou de nombre à nombre.*

Par exemple, ſi *a* eſt contenu exactement ou 2 fois, ou 3 fois dans *b*, on dit que la raiſon de *a* à *b* eſt une raiſon de *nombre à nombre*.

SECONDE DEFINITION.

38 *Lors qu'une Raiſon n'eſt pas de nombre à nombre, elle eſt appellée Sourde.*

Si on ne peut exprimer par nombre la raiſon de *b* à *c*, c'eſt-à-dire combien de fois *b* eſt contenu dans *c*, ou qu'il contient *c*, cette Raiſon eſt une Raiſon Sourde.

TRO-

Troisieme Definition.

La Raiſon exacte ou de nombre à nombre, ſe 39
diviſe en Raiſon d'égalité ou d'inégalité.

Raiſon d'égalité c'eſt lorsqu'une Grandeur eſt contenue préciſément & exactement une fois dans une autre, que l'une n'eſt pas plus grande que l'autre; en un mot, qu'elles ſont égales.

La Raiſon d'inégalité ſe diviſe en celle qu'on appelle de plus grande inégalité, qui eſt quand on commence par le plus grand terme en le comparant au plus petit, comme 3 à 2; & celle de moindre inégalité eſt quand on commence par le plus petit terme en le comparant au plus grand, comme 2 à 3.

Ne confondez pas ces choſes, Raiſon d'égalité, & égalité de Raiſons : elles ſont differentes. Egalité de Raiſons eſt une ſimilitude de Raiſons, comme l'égalité de la raiſon de 3 *à* 6 *& de celle de* 2 *à* 4. *La Raiſon d'égalité conſiſte dans l'égalité d'un antécédent à ſon conſéquent, comme eſt la raiſon de* b *à* b.

Remarquez auſſi qu'une raiſon appartient proprement à l'Antécédent, c'eſt-à-dire que dans une raiſon ou rapport on conſidere premierement & principalement le terme antécédent : comme dans ce rapport du pere au fils qu'on nomme Paternité, *cette paternité appartient au pere. On appelle donc Raiſon de grande inégalité, quand l'Antécédent eſt plus grand que ſon Conſéquent. On dit que cette Raiſon eſt de moindre inégalité, lorsque l'Antécédent eſt plus petit au regard de ſon Conſéquent.*

Quatrieme Definition.

La raiſon exacte d'une Grandeur à une autre Grandeur, reçoit differens noms ſelon que l'Antécédent eſt contenu ou contient ſon Conſéquent un certain nombre de fois. 40

La raiſon de deux termes s'appelle Double, lorsque l'un eſt contenu deux fois dans l'autre; Triple, s'il y eſt contenu 3 fois, &c. Lorsque le plus petit terme eſt l'Antécédent, on dit Sousdouble, Souſtriple, &c.

Cinquieme Definition.

41 *Diviſant l'un des deux termes d'une Raiſon par l'autre terme, le quotient de cette diviſion eſt appellé l'Expoſant de cette Raiſon.*

Parce qu'il expoſe & fait connoitre la maniere que l'un des deux termes contient l'autre, ou en eſt contenu. Ainſi diviſant 12. par 6, le nombre 2 qui eſt le quotient de cette diviſion, eſt l'Expoſant de la Raiſon de 12 à 6.

Sixieme Definition.

42 *On appelle particulierement Expoſant d'une Raiſon, les moindres nombres qu'on puiſſe trouver qui ſoient entre eux comme les termes d'une Raiſon.*

Ainſi ſi *b* eſt la ſeptieme partie de *c*, les expoſans de la raiſon de *b* à *c* ſont 1 & 7 qui ſont les moindres nombres qui ſoient entre eux, comme *b* eſt à *c*.

Septieme Definition.

43 *On dit que pluſieurs termes ſont proportionnels, lorsque comme le premier d'une part eſt au premier de l'autre part, ainſi le ſecond d'une part eſt au ſecond de l'autre part, & le troiſieme d'une part eſt au troiſieme de l'autre part. Ainſi de ſuite.*

Ce qui ſe marque en ces deux manieres.

Premiere maniere. 2. 5. 6. :: 4. 10. 12.

Seconde maniere. 2. 4. :: 5. 10. :: 6. 12.

Hui-

Huitieme Definition.

Les termes homologues d'une proportion sont ceux qui sont de même nom, & tiennent la même place chacun en son rang. 44

Ainsi dans la proportion précédente 2 & 4, 5 & 10, 6 & 12, qui sont ou antécédens ou conséquens, sont les termes *homologues* de cette proportion. Car parmi les antécédens 2 est le premier, comme 4 est le premier conséquent parmi les conséquens; si 5 est le second antécédent, 10 de son côté est le second conséquent, &c.

Neuvieme Definition.

Proportion ordonnée, c'est l'arrangement de plusieurs Grandeurs d'une part, & d'autant de Grandeurs d'une autre part, disposées de telle sorte que la premiere du premier ordre soit à la seconde du premier ordre, comme la premiere du second ordre est à la seconde du second ordre, &c. 45

Voilà une proportion ordonnée.

12. 4. 2. 8. :: 30. 10. 5. 20.

Dixieme Definition.

Proportion troublée, c'est l'arrangement de plusieurs Grandeurs d'une part, & d'autant d'autres Grandeurs d'une autre part, disposées de telle sorte que la premiere du premier ordre soit à la seconde, comme la pénultieme du second ordre à la derniere; puis la seconde du premier ordre à la troisieme, comme l'antépénultieme du second ordre à la pénultieme, & ainsi de suite. 46

Voilà une proportion troublée.

12. 4. 2. 18. 9. 3.

Onzieme Definition.

La Proportion Géometrique droite, c'est celle 47

dont les termes ſont diſpoſez par ordre chacun en ſon rang.

Comme 3 eſt à 6, de même 4 eſt à 8; cette proportion ainſi rangée 3. 6 :: 4. 8. eſt droite.

Douzieme Definition.

48 *Si le premier terme eſt au ſecond comme le quatrieme au troiſieme, cette proportion s'appelle Renverſée, & alors on dit que les deux premiers termes ſont réciproques aux deux autres.*

3. 6. :: 4. 8. Ces quatre termes étant ainſi rangez 3. 6. 8. 4. la proportion eſt renverſée, & 3 eſt à 6 réciproquement, comme 8 eſt à 4.

CHAPITRE III.

Explication de quelques termes moins utiles.

49 JE ne dois pas paſſer ſous ſilence l'explication de certains autres termes qui ſe trouvent dans les Livres. Il faut donc ſavoir que l'une & l'autre raiſon de plus grande inégalité & de moindre inégalité, ſont diſtinguées en cinq eſpeces.

Les eſpeces de la raiſon de plus grande inégalité ſont cinq. La premiere s'appelle *Multiple*; la ſeconde, *Surparticuliere*; la troiſieme, *Surpartiente*; la quatrieme, *Multiple ſurparticuliere*; la cinquieme, *Multiple ſurpartiente*.

La raiſon *Multiple*, eſt quand la plus grande contient tant de fois préciſément la plus petite, comme 6 contient trois fois 2, ainſi 6 eſt multiple de 2.

La raiſon *Surparticuliere*, c'eſt lors qu'un nombre en contient un autre une fois plus une

ne partie, comme la raiſon de 3 à 2 eſt ſurparticuliere, car 3 contient une fois 2, & outre cela une partie de 2.

Les raiſons ſurparticulieres reçoivent differens noms; ce mot, *ſesqui*, eſt un terme dont on ſe ſert pour exprimer l'unité : ainſi raiſon *ſeſquialtere* eſt quand un nombre en contient un autre une fois & une moitié de ce nombre. La raiſon de 3 à 2 eſt *ſeſquialtere*, la raiſon de 4 à 3 eſt *ſeſquitierce*, parce que 4 contient une fois 3 & un tiers de 3; la raiſon de 5 à 4 eſt *ſesquiquarte*, parce que 5 contient une fois 4 & une quatrieme partie de 4.

Raiſon *ſurpartiente* eſt quand la plus grande contient la plus petite une fois, & qu'elle contient outre cela plus d'une de ſes parties. La raiſon de 5 à 3 eſt *ſurpartiente*, parce que 3 eſt contenu une fois dans 5, outre cela il y a plus d'une partie de 3 dans 5, car la troiſieme partie 3 y eſt contenue 2 fois, outre que 3 y eſt contenu une fois; ainſi cette raiſon de 5 à 3 eſt nommée *Surbipartiente-tierce*, celle de 7 à 4 *Surtripartiente-quarte*; ainſi cette raiſon reçoit differens noms.

Raiſon *multiple ſurparticuliere*, eſt quand le plus grand nombre contient le plus petit pour le moins 2 fois, & outre cela une des parties du plus petit. Telle eſt la raiſon de 5 à 2, car 2 eſt contenu 2 fois dans 5, outre cela 5 contient une partie de 2; ce qui s'appelle encore Raiſon *double ſeſquialtere*, comme celle de 7 à 3 *double ſeſquitierce*, celle de 13 à 4 *triple ſeſquiquarte*, parce que 13 contient 3 fois 4, plus une quatrieme partie de 4.

Raiſon *multiple ſurpartiente*, eſt quand le plus grand nombre contient 2 ou pluſieurs fois le

plus petit, & plus d'une de ses parties. Telle est la raison de 8 à 3, 8 contient 2 fois 3, plus 2 parties de 3; c'est pourquoi cette raison est nommée Raison *double surbipartiente-tierce*; la raison de 15 à 4, Raison *triple surtripartiente-quatrieme*.

Les cinq especes de la raison de moindre inégalité ne différent de celles dont nous venons de parler, que par cette particule *sous*, qu'on appose à leur nom: au-lieu de dire *multiple*, on dit *sous-multiple*; *sous-surparticuliere*, au lieu de dire *surparticuliere*; ainsi tout ce qu'on a dit des cinq especes de la Raison de grande inégalité, se doit entendre des especes de la raison de moindre inégalité. Par exemple, la Raison de 4 à 3 qui est de grande inégalité, est surparticuliere: la raison de 3 à 4 qui est de moindre inégalité, est une raison sous-surparticuliere.

Il n'est pas nécessaire de forcer sa mémoire à retenir ces noms, on ne doit pas même s'en servir: si une raison est de nombre à nombre, il faut l'exprimer par ses exposans. Par exemple, si la raison de *b* à *d* est triple sesquiquarte, au lieu de me servir de ces termes embarassans, je dirai simplement que *b* est à *d*, comme 13 est à 4.

On trouve aussi dans les Auteurs les termes suivans, lesquels j'expliquerai pour la même raison, quoique je ne m'en serve pas dans ces Elémens.

Une grandeur est appellée *Multiple* au regard de ses parties, qui étant prises un certain nombre de fois lui sont égales; ainsi 24 est multiple de 6. Or on dit que deux Grandeurs sont multiples pareils ou *équimultiples*, lorsqu'elles contiennent les parties dont elles sont les multiples un même nombre de fois: ainsi 10*b* & 10*d* sont des multiples pareils.

Lors-

Lorsqu'une partie d'une Grandeur eſt contenue préciſément tant de fois dans ſon tout, 2 fois, ou 3 fois, &c. cette partie eſt appellée *Aliquote* de cette Grandeur; ainſi 5 eſt aliquote de 15. Il n'y a point de nombre qui tout au moins n'ait pour aliquote l'unité; car tout nombre eſt contenu une fois en lui-même.

Si les parties aliquotes d'une Grandeur ſont autant de fois dans leur tout, que les parties aliquotes d'une autre Grandeur ſont dans le leur, elles ſont appellées *Aliquotes pareilles*; ainſi 3 & 4 ſont les aliquotes pareilles de 9 & 12, car 3 eſt contenu 3 fois dans 9, comme 4 eſt contenu trois fois dans 12.

On appelle *Aliquote commune* un nombre qui étant pris autant qu'il faut, eſt égal à deux autres nombres: ainſi 3 eſt aliquote commune de 9 & de 12; car 3 pris trois fois eſt égal à 9, & pris 4 fois il eſt égal à 12. Deux nombres ont tout au moins pour leur commune aliquote l'unité, car il eſt manifeſte que l'unité repetée autant qu'il faut, eſt égale à quelque nombre que ce ſoit.

CHAPITRE IV.

Des proprietez des Raiſons & des Proportions Géometriques.

PREMIER AXIOME.

Les Raiſons égales ont des Expoſans égaux. 50

SECOND AXIOME.

Les Grandeurs égales ne peuvent être les Expoſans que de Raiſons qui ſoient égales. 51

LEs Raiſons ſont des manieres de contenir ou d'être contenu, d'où il eſt évident que

deux raiſons ſont égales, c'eſt-à-dire que celle de *b* à *d* eſt la même que celle de *f* à *g*, lorsque *b* contient ou eſt contenu dans *d* comme *f* à *g*; ou ce qui eſt une même choſe, que diviſant *b* & *d* l'un par l'autre, le plus grand par le plus petit, le quotient de cette diviſion eſt le même que de la diviſion de *f* par *g*. Car le quotient n'eſt qu'un ſigne ou une expreſſion de la maniere qu'une Grandeur eſt contenue dans celle qu'elle diviſe. Ces quotiens ſont appellez les Expoſans de ces Raiſons par la ſixieme Définition ci-deſſus, qui ſeront ainſi égaux ſi ces quotiens ſont égaux; les démonſtrations du reſte de ce Livre rouleut toutes ſur ces deux Axiomes.

Troisieme Axiome.

52 *Si la raiſon de* b *à* d *eſt la même que celle de* f *à* g, *celle de* d *à* b *eſt la même que de* g *à* f.

Ce troiſieme Axiome n'eſt pas moins certain que le premier & le ſecond. *Contenir* & être *contenu* ſont des termes réciproques; ainſi il eſt évident que ſi *b* contient *d* comme *f* contient *g*; ainſi *d* eſt contenu dans *b*, comme *g* eſt contenu dans *f*.

Quand on tire une conſéquence de cet Axiome, cela s'appelle conclure *invertendo*.

Quatrieme Axiome.

53 *Le premier Antécédent eſt au ſecond Antécédent, comme le premier Conſéquent au ſecond Conſéquent.*

Ainſi ſi $A.B :: C.D$; donc $A.C :: B.D$, laquelle maniere de conclure s'appelle *Alternando*. On compare alternativement *A* avec *C*, l'Antécédent avec l'Antécédent; & *B* avec *D* le Conſéquent avec le Conſéquent. Ce que nous appel-

pellons ici *Alternando*, d'autres l'appellent *Permutando*.

Nous avons vu dans la Section précedente sup. n. 13. *l'importance qu'il y a de réduire autant que cela ſe peut, pluſieurs & differentes Grandeurs aux mêmes ſignes ou mêmes noms; de ſorte que dans la maniere qu'on les exprime on apperçoive ce qu'elles ont de commun, & ce qu'elles ont de particulier. On le peut faire ici de même.*

Les lettres marquent toutes ſortes de Grandeurs; ainſi une Raiſon étant propoſée telle qu'elle ſoit, ſourde ou non, je puis appeller b *l'Antécédent de cette Raiſon,* & d *le Conſéquent; je puis diviſer* b *par* d, *ou* d *par* b. *Or ſi je nomme* q *le quotient de* d *diviſé par* b, *qui eſt le ſigne de la maniere que* b *eſt contenu dans* d: *donc puiſque le quotient d'une diviſion multipliant le diviſeur, ici* q *multipliant* b, *doit faire* Liv. 1. n. 2. *une grandeur égale à la grandeur diviſée, il faut que* qb *ſoit égal à* d. *Ainſi je puis nommer* qb *la grandeur* d, & *réduire ces deux termes* b & d *à ceux-ci* b. qb, *quoique je ne connoiſſe point leur valeur, & même qu'elle ne ſe puiſſe pas exprimer par nombres, & qu'ainſi leur raiſon ſoit ſourde. Car* q *ne marque autre choſe que la maniere dont* b *eſt dans* d, *ſans la déterminer. C'eſt le quotient de* d *diviſé par* b, *qui ne dit point ſi* b *peut diviſer exactement* d *ou non. Il eſt certain par les Axiomes qu'on vient de propoſer, que les raiſons égales ont des expoſans égaux, les expoſans ſont les quotiens; par conſéquent lorſque deux raiſons ſont égales, que* b *eſt à* d *comme* f *eſt à* g, *ſi le quotient de* d *diviſé par* b *eſt* q, *celui de* g *diviſé par* f *doit être le même; ainſi* g *doit être égal à* qf. *On peut donc réduire cette proportion* b. d :: f. g. *à celle-ci*, b. qb :: f. qf. *C'eſt ce que je dis en moins de paroles dans le Lemme ſuivant & ſon Corollaire.*

Lemme.

54 *Le plus grand terme d'une Raison est égal au plus petit multiplié par le quotient de la division du plus grand par le plus petit.*

Soient b & d les deux termes d'une raison, b est le plus petit terme. Ayant divisé d par b, je nomme q le quotient de cette division. Ce quotient q multipliant le diviseur b, le produit qb sera égal à d la grandeur divisée, Liv. I. n. 21. Ainsi $qb=d$, ce qu'il falloit prouver.

Je supposerai toujours pour abreger, que c'est le conséquent qui est le plus grand terme. Si d avoit été plus petit que b, *la même démonstration fait voir que* qd=b.

Corollaire.

55 *On peut donc exprimer les termes d'une Raison, & même tous ceux d'une Progression, de la maniere suivante.*

J'appellerai toujours q le quotient du conséquent divisé par l'antécédent. Si ces termes sont donc b & d, je pourrai mettre qb au lieu de d. Je pourrai aussi exprimer tous les termes d'une progression de cette même manière, changer par exemple cette progression $\div\ b, c, d, f, g, h, k,$ en celle-ci, $\div\ b. qb. qqb. q^3b. q^4b. q^5b. q^6b.$ qui est la même, car par le Lemme précédent $qb=c$, & multipliant qb par le quotient de la raison de c à d, qui est toujours le même, savoir q, il faudra que $q^2b=d$; ainsi que $q^3b=f$, & que $q^4b=g$, &c.

PRE-

Premiere Proposition.

Premier Théorême.

Deux grandeurs sont égales, lorsqu'elles ont 56
même raison à une troisieme grandeur.

Soit $b.g :: b.f.$ c'est-à-dire que g & f ont une même raison avec b, je dis que $g=f$. Ayant divisé g par b, & f par le même b, puisque les raisons de b à g & de b à f sont égales, ces deux divisions auront un même exposant, ou même quotient, selon le premier Axiome. Je nomme q ce quotient; donc par le Lemme précédent, $q=\frac{g}{f}$. Ainsi les grandeurs g & f étant égales à une même grandeur, savoir à qb, elles sont égales entre elles; ce qu'il falloit démontrer.

Seconde Proposition.

Second Théorême.

Deux Raisons égales à une troisieme raison, 57
sont égales entre elles.

La raison de b à d est égale à celle de x à z, à laquelle celle de f à g est aussi égale, $b.d :: x.z$, & $f.g :: x.z$. Il faut démontrer que $b.d :: f.g$. Par l'hypothese selon le premier Axiome, l'exposant de la raison de b à d. ou ce qui est la même chose, le quotient de d divisé par b, est le même que celui de z divisé par x, puisque ces deux raisons sont égales. Ainsi si le quotient de la raison de b à d est q, celui de la raison de x à z sera aussi q. Or puisque f est à g comme x est à z, & que le quotient de x à z est q; donc celui de f divisé par g sera aussi q. Puis donc que ces deux raisons ont un même quotient, savoir q, elles ont un mê-

me exposant: Donc, selon l'Axiome, elles sont égales, ce qu'il falloit prouver.

Troisieme Proposition.
Troisieme Théorême.

58 *Deux Grandeurs demeurent en même Raison quoi qu'on ajoute à l'une & à l'autre, pourvu que ce qu'on ajoute à la premiere soit à ce qu'on ajoute à la seconde, comme la premiere est à la seconde.*

Soient donnez d'une part b & d, & de l'autre f & g: on ajoute f à b, ce qui fait $b+f$; & g à d, ce qui fait $d+g$; si $b.d::f.g$, je dis, que $b+f.d+g::b.d$; ce qu'il faut démontrer.

Soit q l'exposant de la raison de b à d, qui sera aussi celui de la raison de f à g, puisque ces raisons sont égales: Donc par le Corollaire du Lemme ci-dessus, je puis exprimer ainsi ces quatre grandeurs $b.d.f.g$. les réduisant à celles-ci $b.qb.f.qf$; ainsi ajoutant f à b, & qf à qb, il faut démontrer que $b+f.qb+qf::b.d$. Pour cela je divise le premier conséquent $qb+qf$ par le premier antécédent $b+f$, le quotient de cette division est q. selon ce qui a été enseigné touchant cette Operation dans le premier Livre, que pour diviser par exemple $qb+qf$ par $b+f$, il n'y avoit qu'à supprimer les lettres communes au diviseur, & à la grandeur qui doit être divisée, savoir ici $b+f$, après quoi il ne reste que q. Or par l'hypothese le quotient de d divisé par b est aussi q: donc par le second Axiome la raison de $b+f$ à $qb+qf$, ou de $b+f$ à $d+g$, est égale à celle de b à d; qui est ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire.

59 *Lorsque deux Raisons sont égales, l'antécédent de l'une plus son conséquent est à ce même conséquent*

quent, comme l'antécédent de l'autre plus son conſéquent eſt à ce conſéquent.

Ce Corollaire, à quelque petit changement près, n'eſt, s'il faut ainſi dire, qu'une expreſſion particuliere de la propoſition précédente. Car ſoit $b.\ d :: f.\ g$; pour démontrer que $b+d.\ d :: f+g.\ g$. il n'y a qu'à faire *alternando* $b.f :: d.\ g$. Mais par ce Theorême $b+d.\ f+g :: b.\ f$: & partant $b+df+g :: d.\ g$. Donc encore *alternando* $b+d.\ d :: f+g.\ g$; ce qu'il falloit démontrer.

Quand on compare ainſi les antécédens plus leurs conſéquens avec ces mêmes conſéquens, cela s'appelle compoſer. Et quand on en tire quelque conſéquence, on dit qu'on conclud *componendo*.

Quatrieme Proposition.

Quatrieme Théorême.

Deux Grandeurs demeurent en même raiſon, quoi qu'on retranche de l'une & de l'autre, pourvu que ce qu'on retranche de la premiere ſoit à ce qu'on retranche de la ſeconde, comme la premiere eſt à la ſeconde. 60

Soit $b.\ d :: f.\ g$, on retranche f de b; ce qu'on marque de même $b-f$, & g de d, ce qui ſe marque de même $d-g$; il faut démontrer que $b-f.\ d-g :: b.\ d$. Soit diviſé le conſéquent d par ſon antécédent b, je ſuppoſe que le quotient eſt q; diviſant g par f, cette diviſion aura le même quotient q, puiſqu'on ſuppoſe que la raiſon de f à g eſt égale à celle de b à d. Je puis donc, par le Corollaire du dernier Lemme, *ſup.* n. 54. ſubſtituer qb en la place de d, & qf en la place de g, ainſi il faut démontrer que $b-f.\ qb-qf :: b.\ d$. On a ſuppoſé que le quo-

quotient de *d* diviſé par *b* eſt *q*. Or diviſant le conſéquent *qb—qf* par l'antécédent *b—f*, le quotient eſt le même, ſavoir *q*: donc par le ſecond Axiome ci-deſſus,

b—f; *qb—qf* :: *b. d.* ou *b—f. d—g* :: *b. d.*

Corollaire.

61 *Lorsque deux Raiſons ſont égales, le premier antécédent moins le premier conſéquent, eſt à ce conſéquent comme le ſecond antécédent moins le ſecond conſéquent, eſt à ce ſecond conſéquent.*

Soit *b. d* :: *f. g*: il faut prouver que *b—d. d*:: *f. —g. g.* Premierement *alternando b. f* :: *d. g.* Donc ôtant des termes *b* & *f* les termes *d* & *g*, qui ſont en même raiſon, on aura par cette quatrieme Propoſition *b—d. f—g* :: *b. f.* Or la raiſon de *b* à *f* eſt la même que celle de *d* à *g*. Ainſi *b—d. f—g* :: *d. g.* Donc *alternando b—d. d* :: *f—g. g*; ce qu'il falloit prouver.

Quand on tire une conſéquence de cette vérité, on appelle cela conclure *dividendo*. Il me ſemble qu'on auroit dû dire *ſubtrahendo*, car c'eſt une ſouſtraction.

Cinquieme Proposition.

Cinquieme Théorême.

62 *Lorsque deux Raiſons ſont égales, le premier antécédent eſt au premier antécédent moins le premier conſéquent, comme le ſecond antécédent eſt au ſecond antécédent moins le ſecond conſéquent.*

Si *a. b* :: *c. d*, il faut que *a. a—b* :: *c. c—d*, car *alternando a. c* :: *b. d*: Donc *ſup.* n. 60. *a—b. c—d* :: *a. c*, ou ce qui eſt la même choſe *a. c* :: *a—b. c—d.* Or *alternando a. a—b* :: *c. c—d*; & c'eſt ce qu'il falloit prouver. Quand on tire

tire une conſéquence de cette verité, cela s'appelle conclure *convertendo.*

Sixieme Proposition.

Sixieme Theorême.

Lorsque deux Grandeurs ſont multipliées par une même Grandeur, elles ſont, étant multipliées, en même raiſon qu'avant que d'être multipliées. 63

Soient les grandeurs *b* & *d* multipliées par *x*, il faut démontrer que *xb. xd :: b. d.* Ayant diviſé le conſéquent *d* par l'antécédent *b*, ſoit nommé le quotient de cette diviſion *q*; ainſi *qb=d*, & par conſéquent *xqb=xd.* Il faut donc démontrer que *xb. xqb. :: b. d.* Par l'hypotheſe le quotient de la diviſion de *d* par *b* eſt *q.* Or diviſant le conſéquent *xqb* par l'antécédent *xb*, le quotient eſt encore *q*, ſelon ce qui a été enſeigné en parlant de la diviſion; par conſéquent, par le ſecond Axiome ci-deſſus, les deux raiſons propoſées ayant le même quotient, elles ſont les mêmes,

xb. xqb :: b. d. ou *xb. xd. :: b. d.*

ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire.

Le multiplicateur eſt au produit de la multiplication, comme l'unité à la grandeur à multiplier : pareillement le nombre à multiplier eſt au produit de la multiplication, comme l'unité au multiplicateur. 64

Soit le nombre 6 à multiplier par le multiplicateur 3, en multipliant 1 & 6 par 3; ce qui fait 3 & 18. La même raiſon demeure

1 6 :: 3 18.

alternando 1 3 :: 6 18

Donc

Donc comme l'unité est au multiplicateur 3, de même 6, nombre à multiplier, est au produit 18.

De même si b est multiplié par d, dont bd est le produit, on aura 1. b :: d. db.
alternando 1. d :: b. db.

Septieme Proposition.

Septieme Théorême.

65 *Divisant deux Grandeurs par une troisieme, les quotiens de ces divisions seront en même raison que ces Grandeurs.*

Soient deux grandeurs b & d, je les divise par x, le quotient de b par x soit nommé p, & celui de d par x soit nommé q, il faut prouver que p. q :: b d. Or $px=b$, & $qx=d$; *sup.* n. 55. Donc px. qx :: b d. Or p & q ayant été multipliez par x; selon la Proposition précédente, xp. xq :: p. q: donc, par la seconde cidessus, puisque les raisons de b à d & de p à q sont égales à une troisieme raison qui est celle de xp à xq, il faut que p. q :: b. d; ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire.

66 *Le diviseur est à la Grandeur à diviser, comme l'unité est au quotient; ou, comme l'unité est au quotient, aussi le diviseur est au nombre à diviser.*

Soit 18 à diviser par le diviseur 6, le quotient est 3. Or c'est la même chose que si on proposoit de diviser 6 & 18 par 6, dont les quotiens sont 1 & 3, qui par le Théorême sont entre eux comme 6 & 18, qui est ce qu'il falloit prouver.

1. 3 :: 6. 18.

Hui-

Huitieme Proposition.

Huitieme Théorême.

Lorsque quatre Grandeurs ſont en proportion 67
Géometrique, le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens.

Soient ces quatre grandeurs *b. d :: f. g.* dont *b* & *g.* ſont les extrêmes, & *d* & *f* les moyens, il faut démontrer que *bg=df.* Ayant nommé *q* le quotient de la raiſon de *b* à *d*, celui de la raiſon de *f* à *g* ſera auſſi *q*. Donc *ſup.* n. 55. je puis nommer *qb* la grandeur *d*, & *qf* la grandeur *g*; ainſi il faut démontrer que *bqf=bqf*; ce qui eſt évident, puiſque ce ſont les mêmes grandeurs. Voici encore une autre démonſtration.

Multipliant les deux derniers termes *f* & *g* par le premier qui eſt *b*, par la ſixieme Propoſition *bf. bg :: f. g.* & par la même Propoſition multipliant *b* & *d* par *f* qui eſt le ſecond antécédent, *fb. fd :: b. d*, & par conſéquent *bg* & *fd* ayant même raiſon avec une troiſieme, ſavoir *bf.* ou *fb.* par la premiere Propoſition, ces deux produits ſont égaux; ce qu'il falloit démontrer.

bf { *bg :: f. g.* / *fd :: b. d.*

Corollaire.

Trois Grandeurs étant en proportion continue, le 68
terme moyen multiplié par lui-même, ou le quarré de ce terme, eſt égal au produit ou plan fait des deux extrêmes.

Soient ∴ *b, c, d*, je dis que *cc=bd*; car *b. c :: c. d*; donc *bd=cc*, par le préſent Théorême.

Neuvieme Proposition.

Neuvieme Théorême.

Lorsque quatre Grandeurs ſont tellement diſpo- 69
ſées

ſées que le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens, ces quatre Grandeurs ſont proportionnelles.

Soient ces quatre grandeurs b, d, f, g. Si df produit des moyens d & f eſt égal bg produit des extrêmes b & g; je dis que $b. d :: f. g$. Je multiplie f & g par b, par la 6e Propoſition $bf. bg :: f. g$. Je multiplie b & d par f: ainſi par la même Propoſition $bf, fd :: b, d$. Or puiſque fd & bg ſont deux produits égaux *ſup.* n. 56, $bf \left\{ \begin{matrix} fd :: b. d. \\ bg :: f. g. \end{matrix} \right.$ car la raiſon de bf à fd eſt la même que celle de bf à bg: Donc *ſup.* n. 57. la raiſon de b à d eſt la même que celle de f à g: ainſi $b. d :: f. g$; ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire premier.

70 Donc ſi $ab^2\delta - abc^2 = a^2bc - ab^2c$, il faut que les grandeurs bc & $ab - ac$ qui ont produit $ab^2c - abc^2$ ſoient ou extrêmes ou moyens d'une proportion: de même ab & $ac - bc$, qui ont produit $a^2bc - ab^2c$ ſont auſſi extrêmes ou moyens.

Corollaire second.

71 *Tout changement qui n'empêche point que de quatre Grandeurs les mêmes ſoient ou extrêmes ou moyens, ne trouble point leur proportion.*

Soit $b. d :: f. g$. Quelque changement qui arrive, pourvu que b & g ſoient ou les deux moyens ou les deux extrêmes; & que d & f ſoient auſſi ou les deux moyens ou les deux extrêmes; de ſorte que le produit $bg = df$, ces quatre termes ſeront proportionnels. Or en tranſpoſant les raiſons, comme lorſque de $b. d :: f. g.$ on fait $f. g :: b. d.$ les moyens devien-

viennent les extrêmes, & les extrêmes les moyens : ainſi la proportion n'eſt point troublée, puiſque $df=bg$.

De même en changeant la diſpoſition des termes de chaque raiſon, de ſorte que le conſéquent prenne la place de l'antécédent, & l'antécédent celle du conſéquent, comme ſi de *b. d :: f. g.* on fait *d. b :: g. f.* Par ce changement les extrêmes deviennent les moyens, par conſéquent $bg=df$; ainſi la proportion demeure. En prenant les termes d'une proportion alternativement, c'eſt-à-dire en comparant les antécédens enſemble, & les conſéquens enſemble; comme ſi de *b. d :: f. g.* on fait *b. f :: d. g*, alors *b* & *g* demeurent les extrêmes, & *f* & *d* les moyens; la proportion demeure donc, puiſque $bg=fd$.

On tire ſouvent des conſéquences de ces changemens, & ces conſéquences ſont bonnes, parce que la proportion demeure toujours, quoique changée, comme on l'a vu dans ce Corollaire. Voici plus expreſſément & en peu de mots toutes les differentes manieres dont on peut tirer ces ſortes de conſéquences.

1°. *Si* a. b :: c. d, *la conſéquence eſt bonne* invertendo, *b. a :: d. c.*

2°. *Si* a. b :: c. d, *la conſéquence eſt bonne* alternando *ou* permutando, *a c :: b. d.*

3°. *Si* a. b :: c. d, *la conſéquence eſt bonne* a+b. b :: c+d. d; *ce qui ſe nomme* componendo.

4°. *Si* a. b :: c. d, *la conſéquence eſt bonne* a−b. b :: c−d. d; *ce qui s'appelle* dividendo.

5°. *Si* a. b :: c. d, *la conſéquence eſt bonne* convertendo *a a−b :: c. c−d.*

Cela a été démontré ci-deſſus. On peut encore conclure en la même maniere ou tirer des conſéquen-

quences des deux Propoſitions ſuivantes qu'on va démontrer.

Dixieme Proposition.

Dixieme Théorême.

72 *S'il y a deux ſuites de grandeurs* a, b, c, & c, d, f, *telles que* a. b :: c. d, & b. e :: d. f. *on peut conclure, donc* a. e :: c. f. *Cela s'appelle conclure* ex proportione ordinata.

Selon cette ſuppoſition que *a. b* :: *c. d*, & que *b. e* :: *d. f.* Donc *ſup.* n. 67. *ad=bc* & *bf=ed*: Ainſi comme *ad* & *bc* ſont des grandeurs égales de même que *ed* & *bf*. Donc *ad. ed* :: *bc. bf.* Or *ad. ed* :: *a. e. ſup.* n. 63 & *bc. bf* :: *c. f.* Donc *a. e* :: *e. f*; ce qu'il falloit prouver.

Onzieme Proposition.

Onzieme Théorême.

73 *S'il y a deux ſuites de Grandeurs* a, b, c, & c, d, f; *telles que* a. b :: d. f, & b. e :: c. d. *on peut conclure, donc* a. e :: c. f. Cela s'appelle conclure *ex proportione perturbata.*

Par l'hypotheſe, *a. b* :: *d. f*, & *b. e* :: *c. d.* Donc *af=bd* & *ec=bd*; Donc *af=ec.* Mais puiſque *af* & *ec* ſont deux grandeurs égales, *ſup.* n. 56. elles auront même raiſon à une même grandeur *ef*: Ainſi *af. ef* :: *ec. ef.* Or *ſup.* n. 63. *af. ef* :: *a. e*, & *ec. ef* :: *c. f.* Donc *a. e* :: *c. f*; ce qu'il falloit prouver.

Douzieme Proposition.

Douzieme Théorême.

Les quotiens d'une même Grandeur diviſée par
74 *differens diviſeurs, ſont réciproquement entre eux comme les diviſeurs.*

Soit

Soit *a* diviſé par *b*, dont le quotient ſoit nommé *p*; ainſi $\frac{a}{b}=p$. Soit auſſi *a* diviſé par *c*, dont le quotient ſoit nommé *q*; ainſi $\frac{a}{c}=q$. Il faut prouver que *p* eſt à *q* réciproquement comme *b* eſt à *c*, & par conſéquent que *p. q :: c. b.*

Puiſque le quotient multiplié par le diviſeur, fait un produit égal à la grandeur diviſée: donc $pb=a$, & $qc=a$: donc $pb=a=qc$: donc $pb=qc$: donc *ſup.* n. 69. *p. q. :: c. b*; ce qu'il falloit démontrer.

Treizieme Proposition.

Treizieme Théorême.

Dans une proportion de pluſieurs termes, comme l'un des antécédens eſt à ſon conſéquent, ainſi la 75 *ſomme de tous les antécédens ſera à celle de tous les conſéquens.*

Soit *b. c :: d. f :: g. h.* Il faut démontrer que $b+d+g$ ſomme des antécédens, eſt à $c+f+h$ ſomme des conſéquens, comme *b* eſt à *c*, ou *d* à *f*, ou *g* à *h*, puiſque *b. c :: d. f.* Donc

Alternando b. d :: c. f.
Componendo b+d. d :: c+f. f.
Alternando b+d. c+f :: d. f.

Par l'hypotheſe *d. f :: g. h.*
Donc *b+d. c+f :: g. h.*
Alternando b+d. g :: c+f. h.
Componendo b+d+g. g :: c+f+h. h.
Alternando b+d+g. c+f+h :: g. h; qui eſt ce qu'il falloit démontrer. La raiſon de *g* à *h* eſt la même que celle de *b* à *c*, & de *d* à *f*.

QUATORZIEME PROPOSITION.
Quatorzieme Théorême.

76 *Si l'on multiplie par ordre les termes de deux proportions, les produits ſeront auſſi en proportion.*

Soit *a. b* :: *c. d.*, & *e. f* :: *g. h.* Je dis que *ae*, *bf* :: *eg*. *dh* : car *ſup.* n. 67. *ad=bc*, & *eh=fg*, & multipliant *ad* & *bc* grandeurs égales par les grandeurs égales *eh* & *fg*, elles reſteront égales. Ainſi *adeh=bcfg*, ou *aedh=bfeg* : donc par la neuvieme Propoſition *ae. bf* :: *eg. dh.*

COROLLAIRE.

77 1°. *Si l'on diviſe les termes d'une proportion par les termes d'une autre, les quotiens ſeront auſſi en proportion.*

Car $\frac{ae}{e} . \frac{bf}{f} :: \frac{eg}{g} . \frac{dh}{h}$ devient *a. b* :: *e. d.*

2°. *Les puiſſances quelconques d'une proportion ſont auſſi en proportion.*

Si *a. b* :: *c. d*, en multipliant les termes de cette proportion par eux-mêmes, l'on aura *aa. bb* :: *cc. dd*; multipliant encore celle-ci par la premiere, l'on aura a^3 b^3 :: c^3 d^3.

3°. *Les racines quelconques des termes d'une proportion, ſont auſſi en proportion.*

Si *a. b* :: *c. d.* $\sqrt{a}$. $\sqrt{b}$. :: $\sqrt{e}$. $\sqrt{d}$. &c.

CHA-

CHAPITRE V.

Usages des Proportions dans les Règles de Trois, de Compagnie, & d'une Fausse position.

QUINZIEME PROPOSITION.

Problême premier.

78 *LEs trois premiers termes d'une Proportion étant connus, connoitre le quatrieme.*

Soient donnez *b*, *c*, *d*, les trois premiers termes d'une proportion géometrique, on cherche le quatrieme.

Il faut multiplier le second & le troisieme l'un par l'autre, ce qui fait *cd*, & diviser ce produit par le premier terme *b*. Je suppose que le quotient de cette division soit *f*, je dis que *f* sera le quatrieme terme que l'on cherche, & je le démontre.

Le quotient *f* de *cd* divisé par *b*, étant multiplié par *b*, fait un produit égal à *cd*, Liv. I. n. 21. Ainsi $bf = cd$; Donc ces quatre termes *b*, *c*, *d*, *f* font une proportion $b.c :: d.f$, *sup.* n. 69. Le quatrieme terme de cette proportion se connoit ainsi.

Si on me donnoit donc ces trois nombres 8, 12 & 10, & qu'on demandât un quatrieme terme qui fût à 10 comme 12 est à 8, je multiplierois le second terme 12 par le troisieme qui est 10, ce qui fait 120, lequel produit je diviserois par le premier terme 8. Le quotient de cette division qui est 15, seroit à 10 comme 12 est à 8.

COROLLAIRE.

79 *Soit* b, c :: d, f. *Voilà ce qui doit arriver, selon ce Problême.*

1°. *c* le second terme ayant été multiplié par le troisieme *d*, & le produit *cd* ayant été divisé par le quatrieme *f*, le quotient de la division sera le premier terme : car *sup.* n. 71 *f*, *d* :: *c*, *b*. puisque ce changement ne trouble point la proportion. Ainsi on peut prendre le dernier conséquent pour le premier antécédent, & alors *b* qui étoit le premier terme, sera le quatrieme.

2°. *b*, premier terme, ayant été multiplié par *f* quatrieme terme, & le produit *bf* ayant été divisé par *d* troisieme terme, le quotient de cette division sera égal à *c* second terme ; car *sup.* n. 71. *d*, *b* :: *f*, *c*, où *c* est le quatrieme.

3°. Le troisieme terme *d* est égal au produit du premier *b*, par le quatrieme *f*, divisé par le second *c* ; car *c*, *b* :: *f*, *d*, & alors *d* est le quatrieme terme.

4°. Si la proportion est renversée, c'est-à-dire, qu'au lieu de cette disposition *b*, *c* :: *d*, *f*, ces termes ayent celle-ci *b*, *c* :: *f*, *d*, dans laquelle le quatrieme *d* est d'autant plus petit que le troisieme *f*, que le second *c* est plus grand que le premier *b* ; alors le quatrieme terme *d* est égal à *bf* produit du premier *b* par le troisieme *f* divisé par le second qui est *c* ; car ces termes étant disposez comme dans une proportion droite, ils peuvent être ainsi placez, *c*, *b* :: *f*, *d*. Or, selon la Proposition précédente n. 78. le produit de *bf* divisé par *c*, est égal à *d* : Donc, &c.

DE LA REGLE DE TROIS DROITE, ET INVERSE.

80 Ce dernier Corollaire enseigne la pratique de la Règle qu'on appelle communément Règle de Trois, & à laquelle quelques-uns, à cause du grand

grand usage qu'on en fait, ont donné le nom de Règle d'Or. La Règle de Trois est Droite ou Inverse. Par la Règle de Trois droite on cherche le quatrieme terme d'une proportion dont les termes sont ordonnez proportionnellement, c'est-à-dire que le quatrieme est au troisieme ce que le second est au premier. Par la Règle de Trois Inverse on trouve le quatrieme terme d'une proportion où l'ordre proportionnel des termes est renversé, de sorte que d'autant que le second terme est plus grand ou plus petit que le premier, le quatrieme au contraire est plus petit ou plus grand que le troisieme. Dans la Règle de Trois droite on raisonne du plus au plus, ou du moins au moins. Dans l'Inverse on raisonne du plus au moins, ou du moins au plus; ainsi il est évident qu'on renverse la raison.

Question sur la Regle de Trois Droite.

Un homme dépense en 6 jours 24 pistoles; On demande combien en 30 jours il dépensera de pistoles, faisant toujours les mêmes dépenses.

Dans cette Question on cherche un quatrieme terme qui soit à 30, comme 24 est à 6. On connoit les trois premiers termes de cette proportion; pour trouver le quatrieme, il faut, selon la Proposition précédente, multiplier 30 par 24, & diviser leur produit 720 par le premier terme qui est 6, le quotient de cette division 120 sera le quatrieme terme, & le nombre de pistoles que dépensera cet homme en trente jours.

Toute la pratique de cette Règle consiste à ranger les termes connus & donnez, en sorte qu'ils soient proportionnels les uns aux autres, & que l'inconnu se trouve le quatrieme terme de la proportion; car on peut proposer cette ques-

tion de maniere que les termes ne ſoient pas rangez dans une proportion droite. Comme ſi par exemple on diſoit: Un homme a dépenſé 24 piſtoles en ſix jours; en trente jours, combien dépenſera-t-il? Il faut que les choſes de même eſpece ſoient ou *les antécédens*, ou *les conſéquens* de la proportion. Si on a mis les jours pour premier antécédent, il faut que les jours ſoient le ſecond antécédent; ce qui eſt évident lors que l'on a conçu ce que c'eſt que proportion. Il faut auſſi tâcher de donner aux mêmes choſes les mêmes noms. On pourroit propoſer cette même queſtion ainſi, demandant: Si un homme en ſix jours dépenſe 24 piſtoles, combien dans un mois dépenſera-t-il d'écus? Ces nombres 6 jours, 24 piſtoles, un mois, & les écus qu'il faut trouver, ſont quatre termes qui ont chacun leur nom en particulier, comme s'ils marquoient quatre choſes differentes, ce qui peut cauſer de la confuſion. Pour l'éviter, il faut donner à la même quantité les mêmes noms. Par exemple, ayant appellé le premier tems, jours, il faut appeller le ſecond tems des jours: & ayant parlé de piſtoles, il faut continuer à exprimer la quantité de l'argent par ce même nom de piſtoles; après il faut placer ces noms de ſorte qu'ils ſe répondent. Au lieu donc de dire un mois, il faut dire trente jours: au lieu de dire, combien dépenſera-t-on d'écus? il faut dire, combien dépenſera-t-on de piſtoles? Ce ſont de petites difficultez qui ne peuvent pas arrêter ceux qui ont une notion diſtincte des proportions.

DE LA REGLE DE TROIS INVERSE.

81 On ſe ſert de cette Règle lors qu'on cherche un quatrieme terme plus petit que le troiſieme, à pro-

proportion que le ſecond terme eſt plus grand que le premier; ou qui ſoit plus grand que le troiſieme, à proportion que le ſecond eſt plus petit que le premier.

QUESTION SUR LA REGLE DE TROIS INVERSE.

A préſent que le ſetier de bled coute 16 *livres, pour une certaine monnoye j'ai* 6 *livres de pain; lors que la même meſure de bled ne vaudra que* 8 *livres, combien aurai-je de livres de pain pour la même monnoye?*

Les trois termes donnez 16, 6, 8, ne ſont point rangez proportionnellement. Le nombre propoſé des livres de pain qu'on cherche, doit être d'autant plus grand que celui qui eſt connu, ſavoir 6 livres de pain, que 16 livres prix du ſetier de bled dans un certain tems, eſt plus grand que 8 prix d'un ſetier de bled dans un autre tems; ainſi le troiſieme terme devroit être le premier. C'eſt pourquoi faiſant le contraire de ce qu'on a fait dans la Règle de Trois Droite, il faut multiplier le premier terme par le ſecond, 16 par 6, ce qui fait 96, & diviſer le produit 96 par le troiſieme qui eſt 8, le quotient de cette diviſion 12 eſt le quatrieme terme. Ainſi cette Règle eſt aſſez inutile; car quand on connoit bien la nature des proportions, on peut arranger les termes d'une Queſtion de ſorte qu'ils faſſent une proportion droite, dont on trouve le quatrieme terme par une Règle de Trois droite. Les termes de cette Queſtion pouvoient ſe ranger en cette maniere.

8 *bled*, 16 *bled* :: 6 *pain*, 12 *pain*.

Seizieme Proposition.

Problême second.

82 *Diviſer une grandeur proportionnellement aux parties données d'une autre grandeur.*

*a*9 eſt un nombre dont les parties ſont *b*4, *c*2, *d*3.

*A*27 eſt un ſecond nombre qu'on veut partager en trois parties *B*, *C*, *D*, proportionnelles à celles de *a*; de ſorte que

$$a9.\ A27 :: \begin{cases} b4.\ B12. \\ c2.\ C\ 6. \\ d3.\ D\ 9. \end{cases}$$

Il faut chercher la valeur de *B*, de *C*, & de *D*, qui ſont les quatriemes termes de cette proportion, par trois operations differentes.

1°. La valeur de *B*, multipliant *b* par *A*, & diviſant le produit par *a*, le quotient de cette diviſion, qui eſt 12, ſera la valeur de *B*.

2°. Il faut multiplier *c* par *A*, & en diviſer le produit par *a*, le quotient de la diviſion qui eſt 6. ſera la valeur de *C*.

3°. Multipliant *d* par *A*, & diviſant leur produit par *a*, le quotient 9 ſera la valeur de *D*. Or il n'y a pas de doute que *B*, *C*, *D*, ne ſoient les parties de *A*; car par l'hypotheſe, $a, A :: b, B :: c, C :: d, D$. Donc *ſup.* n. 75.

$a + b + c + d.\ A + B + C + D :: a, A.$

Donc *alternando*:

$a + b + c + d.\ a :: A + B + C + D.\ A.$

Donc *dividendo*:

$a + b + c + d - a.\ a :: A + B + C + D - A.\ A.$ ou ce qui eſt la même choſe.

$b + c + d.\ a :: B + C + D.\ A.$

Or $b + c + d = a$ par l'hypotheſe: Donc $b. + C + D = A$; ce qu'il falloit démontrer.

DE

DE LA REGLE DE COMPAGNIE.

La Règle de Compagnie eſt une pratique de la Propoſition précédente. Lors que pluſieurs Marchands ſont entrez dans une ſocieté, & qu'ils ont fourni diverſes ſommes d'argent avec leſquelles ils ont fait un certain gain, on voit par cette Règle de Compagnie combien ils doivent gagner à proportion des ſommes qu'ils ont contribuées, ou de quelle maniere il faut partager le gain proportionnellement aux ſommes particulieres que chaque Marchand de cette Compagnie a contribuées, diviſant par le moyen de la Propoſition précédente, tout le gain, proportionnellement aux parties de la miſe totale.

QUESTION.

Trois Marchands ont fait une bourſe de 10000 *livres; le premier a mis* 2000 *liv. le ſecond* 5000 *liv. le troiſieme* 3000 *liv. ils ont gagné* 4000 *liv. On demande comment on pourra partager le gain qu'ils ont fait, proportionnellement aux ſommes qu'ils ont avancées?*

Selon ce qui a été enſeigné dans la derniere Propoſition, il faut mettre au premier terme d'une Règle de Trois l'addition des trois ſommes contribuées, qui eſt 10000. livres; au ſecond, le gain qui eſt 4000. livres; au troiſieme les trois ſommes qu'ils ont avancées ſéparément, & puis chercher les quatriemes termes proportionnels, qui ſe trouveront être pour le premier 800. liv. pour le ſecond 2000. liv. pour le troiſieme 1200. livres. Ces trois ſommes ſont les parties du gain 4000. l. diviſées en parties proportionnelles à la miſe totale 10000. livres.

10000. l. 4000. l. :: { 2000. l. 800. l. / 5000. l. 2000. l. / 3000. l. 1200. l.

DE LA REGLE D'UNE FAUSSE POSITION.

84 Lors qu'on ſait la proportion que les parties inconnues d'un nombre propoſé ont enſemble, on ſuppoſe un nombre autre que le propoſé, dont les parties ſont en même proportion que celles du propoſé, & par les nombres ſuppoſez & connus, on connoit ceux qu'on cherche.

On appelle cette Règle, la Règle *de Fauſſe poſition*, parce qu'on ſuppoſe un nombre avec lequel on raiſonne comme ſi c'étoit le véritable nombre, quoi qu'il ne le ſoit pas. Il y a deux Règles de Fauſſe poſition ; la premiere eſt d'une Fauſſe poſition, la ſeconde eſt de deux Fauſſes poſitions. Nous parlerons de cette derniere ailleurs.

QUESTION SUR LA REGLE DE FAUSSE POSITION.

On ſait que les trois âges de trois perſonnes ſont enſemble 144 *ans, que l'âge de la ſeconde eſt double de l'âge de la premiere, & l'âge de la troiſieme triple de l'âge de la ſeconde. On demande quel eſt l'âge d'un chacun.*

Je fais cette ſuppoſition que le premier eſt âgé de 3 ans, par conſéquent ſelon la Queſtion, l'âge de la ſeconde perſonne doit être 6 double de 3, l'âge de la derniere eſt triple de la ſeconde ; il doit donc être de 18. Or ces trois âges 3, 6, 18, ne font que 27, par conſéquent ma ſuppoſition eſt fauſſe ; car les trois âges, ſelon la Queſtion, doivent faire 144 ans. Mais puiſque je ſai que

les

les parties de 144 ſont proportionnelles aux parties de 27, qui ſont 3, 6, 18 par la Propoſition précédente, je partage 144 parties proportionnelles à celles de 27, comme il a été enſeigné ci-deſſus, n. 82.

$$27. 144 :: \begin{cases} 3 & 16 \\ 6 & 32 \\ 18 & 96 \end{cases}$$

Ainſi la premiere perſonne aura 16 ans, la ſeconde 32, & la troiſieme 96.

CHAPITRE VI.

Des Progreſſions Géometriques.

DIX-SEPTIEME PROPOSITION.

Théorême quinzieme.

DAns une Progreſſion Géometrique, le produit de deux termes également éloignez des Extrêmes, eſt égal au produit des Extrêmes. 85

Soit cette progreſſion ÷ *b. c. d. e. f. g. b.* &c. il faut prouver que $eg = bh$, ou $df = bb$. Par la Définition des progreſſions $b, c :: g, h$; Donc *ſup.* n. 67. $bh = cg$. Et puiſque $b, d :: f, b$; Donc $bh = df$, &c.

COROLLAIRE.

Le produit ou plan fait de deux termes d'une Progreſſion, eſt égal au quarré d'un troiſieme terme moyen entre ces deux termes. 86

Ainſi $ce = dd$, & $df = ee$; car $cd :: d. e$, & $d. e :: e. f$, &c.

DIX-HUITIEME PROPOSITION.

Théorême ſeizieme.

Dans une Progreſſion le ſecond terme eſt égal au pre- 87

premier multiplié par la premiere puissance de l'exposant de la raison qui regne dans cette progression : le troisieme au premier multiplié par la seconde puissance de cet exposant ; le quatrieme au premier par la troisieme puissance de cet exposant. Ainsi de suite.

Ce Théorême n'est qu'une suite du Lemme proposé *sup.* n. 54. & la même chose que ce qui est contenu dans le Corollaire qui suit *sup.* n. 55. mais exprimée d'une autre maniere. Soit donc cette progression $\div\div b, c, d, f, g, h,$ &c. supposant que l'exposant de la raison de b à c est q, c'est-à-dire que c divisé par b le quotient de cette division est q ; Donc $qb = c$. Et puisque le quotient de d divisé par c ou qb est encore q : Donc qc ou qqb est égal à d. Ainsi on réduira cette progression à celle-ci, qui est la même.

$$\div\div b, qb, q^2b, q^3b, q^4b, q^5b, \text{ \&c.}$$

Où vous voyez à l'œil que le second terme est égal à b le premier terme multiplié par la premiere puissance de l'exposant q, le troisieme au premier b multiplié par la seconde puissance de q. Ainsi de suite.

Dix-neuvieme Proposition.
Problême troisieme.

88 *Continuer une Progression dont on connoit les trois premiers termes, ou deux seulement, avec l'exposant de leur raison.*

Soient ces trois termes $\div\div b. c. d.$ Multiplier c par d, & divisant le produit par b, le quotient $\frac{cd}{b}$ sera le quatrieme terme *sup.* n. 78. $b. c. :: d. \frac{cd}{b}$.

Or puisque $:: c. d. \frac{cd}{b}$, c'est-à-dire que ces trois ter-

termes ſont les trois premiers termes d'une proportion, on leur trouvera de la même maniere un quatrieme; ainſi on pourra augmenter à l'infini cette progreſſion.

Si l'on ſait que l'expoſant de la raiſon qui regne dans cette progreſſion eſt q, c'eſt-à-dire que q eſt le quotient de c diviſé par b; par la Propoſition précédente, le troiſieme terme ſera q^2b, le quatrieme q^3b, le cinquieme q^4b; ainſi de ſuite.

VINGTIEME PROPOSITION.

Problême quatrieme.

Trouver quelque terme que ce ſoit d'une Progreſſion dont on connoit le premier terme avec l'expoſant de la raiſon qu'il a avec le ſecond terme. 89

Le premier terme d'une progreſſion eſt 5, l'expoſant de la raiſon qu'il a avec le ſecond terme eſt 10; je veux trouver le huitieme terme. Pour cela je prens la ſeptieme puiſſance de 10, en multipliant 10 ſix fois par lui-même; ce qui ſe fait en ajoutant 6 zero après 10. Je multiplie donc par la ſeptieme puiſſance de 10 qui eſt 10000000, le premier terme 5, ce qui fait 50000000, qui ſera le huitieme terme que l'on cherche *ſup.* n. 87. car il eſt fait du premier terme multiplié par la ſeptieme puiſſance de l'expoſant de la raiſon avec le ſecond terme.

PREMIERE QUESTION.

Un Marchand vend un très-beau cheval, à condition que du premier clou de ſes fers on donnera un denier, du ſecond clou on donnera 10 deniers, du troiſieme 100, & il y en a 20: on demande combien le vingtieme clou doit être payé?

Pour trouver ce prix il faut ajouter 18 zero

après 10; de ſorte que ce dernier clou vaudroit 1000000000000000000 deniers; ce qui fait une ſomme prodigieuſe. Tous les Princes du monde ne ſeroient pas aſſez riches pour acheter ce cheval à cette condition.

SECONDE QUESTION.

Jacob entre en Egypte avec 70 perſonnes. On ſuppoſe que ſa famille après 20 ans fut deux fois auſſi grande; que 20 ans enſuite elle s'augmenta encore deux fois autant, en même proportion, ainſi de ſuite. On demande combien elle fut augmentée 200 ans après.

On cherche le dixieme terme d'une progreſſion, dont le premier terme eſt 70: pour cela j'éleve 2, expoſant de la raiſon qui regne dans cette progreſſion, à la neuvieme puiſſance, multipliant 2 huit fois par lui-même, ce qui fait 512, par laquelle puiſſance je multiplie le premier terme 70. Le produit eſt 35840. Ainſi les dernieres 20 années du ſecond ſiecle après que Jacob entra en Egypte, ſa famille s'augmenta de ce nombre.

VINGT-UNIEME PROPOSITION.

Théorême dix-ſeptieme.

90 *Dans une Progreſſion géometrique, le ſecond terme moins le premier eſt au premier, comme le dernier moins le premier eſt à la ſomme de tous les termes qui le précedent.*

Soit ÷ *b. c. d. f. g. h.* Dans cette progreſſion, comme dans toutes les autres, chaque conſéquent peut être pris pour antécédent du terme ſuivant; ainſi on peut exprimer cette progreſſion en cette maniere;

b. c :: c. d :: d. f :: f. g :: g. h.

On

Or comme le premier terme b est au second c, ainsi $b+c+d+f+g$, somme de tous les antécédens, est à $c+d+f+g+h$, somme de tous les conséquens, *sup.* n. 75.

$b.c :: b+c+d+f+g. c+d+f+g+h.$

Invertendo.

$c.b :: c+d+f+g+h. b+c+d+f+g.$

Dividendo.

$c-b.b :: c+d+f+g+h+b-c-d-f-g. b+c+d+f+g.$

Or puisque $+c+d+f+g-c-d-f-g=o$; donc $c+d+f+g+h+b-b-c-d-f-g=h-b$, & par conséquent $c-b. b :: h-b. b+c+d+f+g$; c'est-à-dire que le second terme c moins le premier b est à b, comme le dernier h moins le premier b est à la somme de tous ceux qui le précédent; qui est ce qu'il falloit prouver.

Remarquez que ce que nous venons de démontrer du second & du premier terme, par rapport au dernier & à la somme de ceux qui le précédent, se doit entendre de quels autres deux termes que ce soit, pourvu qu'ils se suivent l'un l'autre. C'est ce que nous allons encore démontrer dans le Corollaire qui suit.

I. COROLLAIRE.

Dans une progression lors que deux termes se suivent immédiatement, celui qui suit moins celui qui précede est à celui qui précede, comme le dernier terme moins le premier est à la somme de tous ceux qui précédent.

Ainsi dans l'exemple proposé nommant f la somme de tous les termes qui précédent h; je dis que $d-c. c :: h-b. f$. De même aussi $h-g. g :: h-b. f$, & ainsi des autres: ce qui est évident. Car une progression géometrique n'est

qu'une continuation de la même raiſon. Donc $b. c :: c. d$, & de même $b. c :: g. h$. Mais *invertendo* $c. b :: d. c$, & $c. b :: h. g$. *dividendo* $c-b. b :: d-c. c$, & $c-b. b :: h-g. g$. Or par cette propoſition $c-b. b :: h-b. f$. Donc $d-c. c :: h-b. f$, & $h-g. g :: h-b. f$. Ce qu'il falloit démontrer.

2. COROLLAIRE.

92 1°. *Si la raiſon double regne dans une Progreſſion, le dernier terme que je nomme* x, *moins le premier terme, eſt égal à la ſomme de tous les termes qui le précédent.*

Soit nommé f la ſomme de tous les termes qui précédent x le dernier terme, je nomme a le premier terme. Si c'eſt la raiſon double qui regne dans cette progreſſion, le premier terme étant a, le ſecond ſera $2a$. Or par la Propoſition préſente $2a-a. a :: x-a. f$. Donc puiſque $2a-a$ eſt égal à a, il faut que $x-a$ ſoit égal à f: c'eſt-à-dire que le dernier terme de la progreſſion moins le premier eſt égal à la ſomme de tous les termes qui le précédent : ce qu'on avoit propoſé.

2°. *Si la raiſon triple regne, le dernier terme* x *moins le premier, eſt le double de* f, *ſomme de ceux qui le précédent.*

Car ſi a eſt le premier, le ſecond ſera $3a$. Or par la Propoſition préſente, $3a-a. a :: x-a. f$. Partant puiſque $3a-a$ eſt le double de a; donc $x-a$ ſera le double de f: ce qu'on avoit propoſé.

3°. *Si la raiſon quadruple regne, le dernier terme* x *moins le premier, eſt triple de* f, *ſomme de ceux qui le précédent.*

Car ſi le premier eſt a, le ſecond ſera $4a$. Or, par la Propoſition preſente, $4a-a. a :: x-a. f$.

Donc

Donc $4a - a$ étant le triple de a, il faut que $x - a$ soit le triple de s.

Ainsi de toutes les autres progressions qui ont par conséquent des proprietez particulieres, selon les differentes raisons qui y regnent, lesquelles nous découvrons toutes par ce seul Corollaire.

On appelle Progression Multiple celle dont le second terme est plus grand que le premier; & Sous-multiple celle dont le premier terme est plus grand que le second, de sorte que la progression va toujours en diminuant, comme celle-ci ÷÷ 16. 8. 4. 2. 1. *&c. ce qui peut aller à l'infini, puisque l'esprit ne trouve aucune borne dans la divisibilité des Grandeurs, comme nous le démontrerons dans la Proposition suivante. Mais supposons qu'enfin on puisse arriver à une fin, c'est-à-dire à une Grandeur si petite qu'elle ne puisse être divisée, & qu'elle soit presque égale à zero : Puisqu'il est évident qu'une Progression Multiple peut être changée en Sous-multiple, & une Sous-multiple en Multiple, n'y ayant qu'à la retourner : nous pouvons donc regarder le premier terme de cette progression qui est* 16, *comme le dernier; & alors, selon le Corollaire précédent,* 16 *moins le premier terme qui est zero, est égal à tous les termes qui le précédent, quoique leur nombre soit indéfini. Ce qui nous fait appercevoir la Solution du Sophisme de Zenon.*

Supposant, disoit ce Philosophe, qu'Achille aille dix fois plus vîte qu'une Tortue, si la Tortue a une lieue d'avance, jamais Achille ne l'attrapera; car tandis qu'Achille fera la premiere lieue, la Tortue fera la dixieme de la seconde lieue : & tandis qu'Achille fera la dixieme de la seconde lieue, la Tortue fera la dixieme de cette dixieme, & ainsi à l'infini.

Zenon

Zenon ſuppoſoit que toutes ces dixiemes de dixiemes à l'infini, faiſoient un eſpace infini de lieues; qui pourtant ne ſont toutes enſemble qu'une neuvieme de lieues; car puiſque la raiſon Décuple regne dans cette progreſſion, le dernier terme qui eſt une lieue moins le premier qui eſt preſque zero, ſera neuf fois plus grand que ceux qui le précédent, c'eſt-à-dire, que toutes ces dixiemes de dixiemes. Dans cette progreſſion ſous-multiple, une lieue eſt le premier terme; mais, comme nous avons dit, en changeant cette progreſſion ſous-multiple en une multiple, une lieue eſt le dernier terme qui moins le premier zero, ſera neuf fois plus grand que toutes ces dixiemes de dixiemes de lieues, par le Corollaire précédent; ainſi toutes ces dixiemes de dixiemes, pour grande qu'on conçoive la progreſſion, ne vaudront jamais qu'une neuvieme de lieue.

VINGT-DEUXIEME PROPOSITION.
Théorême dix-huitieme.

94 *Le nombre des termes d'une Progreſſion Géometrique ſe peut augmenter en montant & en deſcendant.*

Soit cette progreſſion :: *a*, *b*, *c*. On peut trouver en montant un quatrieme terme, proportionnel à ces trois qui ſont donnez, & enſuite un cinquieme, un ſixieme à l'infini: il n'y a pas de difficulté à cela. On le peut de même en deſcendant; car ſoit *a* ce premier terme de la progreſſion qui monte, & le dernier de celle qui deſcend, je ſuppoſe que la raiſon Décuple regne dans l'une & dans l'autre. En diviſant *a* en 10 parties, & appellant *x* une de ces dixiemes, cet *x* ſera le ſecond terme en deſcendant; & diviſant le même *x* en dix parties, & nommant *z* cette dixie-

dixieme, z sera le troisieme terme en descendant. Continuant à diviser par dixieme, je dis que l'on n'arrivera point à zero. Car soit nommé *y* le dernier terme de la progression, quel qu'il soit, zero ou un nombre réel. Ainsi *y*. . . . . *zz*, *a*, ÷÷. Soit aussi nommée *s* la somme de tous les termes de la progression. Alors *a*—*y*, c'est-à-dire 9 fois *a* moins la dixieme partie du terme qui est avant *y*, sera plus grand que *s*, *sup.* n. 91. Donc *y* n'est pas zero, mais quelque chose qui se peut encore diviser. La même chose se peut dire de tout autre terme plus éloigné que *y*. Ainsi on n'arrivera jamais à zero.

VINGT-TROISIEME PROPOSITION.

Théorême dix-neuvieme.

La somme d'une Progression infinie peut être égale à un nombre fini. 95

Car soit une progression infinie en descendant, dans laquelle regne la raison double. Le premier terme est 2. le second 1 qui est la moitié de 2. le troisieme $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire la moitié de 1. le quatrieme $\frac{1}{4}$, c'est-à-dire la moitié de la moitié, & ainsi à l'infini: de sorte que comme ces termes vont en diminuant, on peut dire que le dernier terme est zero. Ainsi ÷÷ 2. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. . . . . 0; & partant ÷÷ 0 . . . . . $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{2}$ 1. 2. Or *sup.* n. 92. ce dernier terme 2 moins le premier qui est zero, est égal à la somme de tous les termes précédens; partant toute cette suite infinie de moitiez de moitiez est égale à 2, ainsi à un nombre fini.

VINGT-

VINGT-QUATRIEME PROPOSITION.
Problême cinquieme.

96 *Trouver la somme d'une Progression dont on connoit le premier & le second terme, avec le dernier.*

Je nomme le premier a, le second b, & le dernier x, & f la somme de ceux qui précédent le dernier, $b-a.\ a :: x-a.\ f.$ *sup.* n. 90. On trouvera la valeur de f multipliant le dernier terme x, après en avoir retranché le premier a, par le premier qui est a, & divisant ce produit par le second terme, après en avoir retranché le premier, c'est-à-dire par $b-a$. Le quotient sera la valeur de f, qui étant ajoutée au dernier x qu'on suppose connu, on aura la somme de toute la progression; puisque f est la valeur de tous les termes qui précédent x, qui est le dernier terme.

PREMIERE QUESTION.

Une personne la premiere année a dépensé 10 *pistoles, la seconde année* 15, *& la derniere année de sa vie* 10010. *On demande combien elle a dépensé de pistoles avant sa mort.*

Selon cette derniere Proposition, le second terme 15, moins le premier 10, est au premier 10 comme 10010 moins le premier 10 est à la somme des termes qui le précédent.

$15-10.\ 10 :: 10010-10.\ f.$

Pour avoir donc la somme que l'on cherche, je multiplie $10010-10$, c'est-à-dire 10000, par 10, le produit est 100000 que je divise par $15-10$, c'est-à-dire par 5, le quotient de la division est 20000 que j'ajoute à 10010, ce qui fait 30010 qui est le nombre des pistoles que cette personne a dépensées.

SE-

SECONDE QUESTION.

Supposant que la famille de Jacob, 20 ans après son entrée dans l'Egypte, fût deux fois aussi grande que lors qu'elle y entra, & qu'ainsi Jacob y étant entré avec 70 personnes, après 20 ans sa famille fut de 140, augmentant toujours dans la même proportion, & qu'enfin les 20 dernieres années du second siecle après son entrée, elle se trouva être au nombre de 35840. On demande de combien elle fut augmentée dans tout cet espace de 200 ans?

Cette Question se réduit à trouver la somme d'une progression dont le premier terme est 70, le second 140, & le dernier 35840. Or puisque ce dernier terme moins le premier 70, est égal à tous les termes qui le précédent, *sup.* n. 92; il faut ajouter à 35840. le même nombre 35840 moins 70, c'est-à-dire, 35770 avec 35840, ce qui fait 71610.

Nous avons supposé qu'au bout de 20 ans cette famille fut plus grande deux fois, que lors qu'elle entra dans l'Egypte. Mais elle ne fut pas seulement augmentée du double; car Jacob avoit plusieurs enfans, qui étant tous mariez, eurent des enfans de leurs femmes pendant ces vingt premieres années. Ainsi 200 ans après, cette famille étoit bien plus que de 71610 personnes.

VINGT-CINQUIEME PROPOSITION.

Problême sixieme.

Le premier, le dernier terme, & le nombre des 97
termes d'une Progression étant donnez, en trouver l'exposant.

Soit une progression dont 70 est le premier terme, & 35840 le dernier terme qui est le dixieme. On veut trouver l'exposant de la raison qui regne dans cette progression. Ce dernier terme est fait

du

du premier terme 70 multiplié par la neuvieme puiſſance de l'expoſant que l'on cherche, *ſup.* n. 87. Diviſant donc 35840 par 70, le quotient qui ſera 512 ſera la neuvieme puiſſance de l'expoſant, laquelle étant extraite de ce nombre 512, ſelon la méthode que nous en avons donnée Liv. 2. n. 49. il ſe trouve que l'expoſant que l'on cherchoit eſt 2.

VINGT-SIXIEME PROPOSITION.
Problême ſeptieme.

98 *Le premier terme, l'expoſant & le dernier terme étant donnez, trouver le nombre des termes.*

Le premier terme eſt 70, l'expoſant eſt 2, le dernier terme 35840. Par la 18e. Propoſition, ce dernier terme n'eſt autre choſe que le premier multiplié par une certaine puiſſance de l'expoſant égale, c'eſt-à-dire de même nom que le nombre des termes qui précédent ce dernier 35840. Ainſi il n'y a qu'à diviſer 35840 par 70, le quotient eſt 512. 2°. Il faut élever l'expoſant 2 de puiſſance en puiſſance, juſqu'à ce qu'on ait un produit égal à 512, quotient de la ſuſdite diviſion. Or 2 élevé juſqu'à ſa neuvieme puiſſance donne 512. Donc 35840 eſt le dixieme terme, fait du premier 70, multiplié par 512, neuvieme puiſſance de l'expoſant 2 : Ainſi la progreſſion a dix termes.

QUESTION.

On ſait qu'une perſonne la premiere année dépenſa 6 piſtoles, la ſeconde trois fois davantage, & qu'elle en dépenſa 486 la derniere année. On demande pendant combien d'années elle fit cette dépenſe?

Le premier terme de cette progreſſion eſt 6 piſtoles, l'expoſant de la raiſon qui regne dans cette progreſſion eſt 3, & le dernier terme eſt 486.

486. Je diviſe 486 par le premier terme 6, le quotient de cette diviſion eſt 81, qui étant la quatrieme puiſſance de 3, il faut que 486 ſoit le cinquieme terme, & que par conſéquent cette progreſſion ait 5 termes.

VINGT-SEPTIEME PROPOSITION.
Problême huitieme.

L'expoſant, le nombre des termes, le dernier terme, étant donnez, trouver le premier terme de la Progreſſion. 99

L'expoſant d'une progreſſion eſt 3, le dernier terme eſt 486; il y a cinq termes. Le terme 486 eſt fait du premier terme multiplié par la quatrieme puiſſance de l'expoſant, *ſup.* n. 87: Donc en diviſant 486 par 81 quatrieme puiſſance de 3, le quotient qui eſt 6, ſera le premier terme de cette progreſſion que je cherchois.

VINGT-HUITIEME PROPOSITION.
Problême neuvieme.

L'expoſant, le nombre des termes étant donnez avec la ſomme de la progreſſion, trouver chacun des termes. 100

L'expoſant d'une progreſſion de ſix termes eſt 3, la ſomme de cette progreſſion eſt 728, il faut trouver chaque terme de cette progreſſion. Pour cela je prens une progreſſion connue où regne la raiſon triple, comme eſt celle-ci qui a ſix termes, ÷÷ 1. 3. 9. 27. 81. 243. la ſomme de cette progreſſion eſt 364. En diviſant 728 en parties proportionnelles à celle de 364. *ſup.* n. 82. l'on trouvera tous les termes que l'on cherche, qui ſeront ÷÷ 2. 6. 18. 54. 162. 486. car ces termes doivent être tous proportionnels à ceux de l'autre progreſſion.

VINGT-

VINGT-NEUVIEME PROPOSITION.
Problême dixieme.

Le premier terme d'une Progreſſion, l'expoſant de la raiſon qui y regne, & la ſomme de la Progreſſion étant donnés, trouver combien cette Progreſſion a de termes, & la valeur du dernier terme.

Le premier terme d'une progreſſion eſt 2, l'expoſant de la raiſon qui y regne eſt 3, & 728 eſt la ſomme de tous les termes de la progreſſion. Cette ſomme contient le dernier terme, plus tous ceux qui le précédent. Or ce dernier terme moins le premier qui eſt 2, eſt le double de tous ceux qui le précédent, *ſup.* n. 92. Donc ayant ôté de 728 le premier terme qui eſt 2, & diviſé le reſte 726 en deux parties, telles que l'une ſoit le double de l'autre, qui ſeront 242 & 484, *ſup.* n. 84; ayant ajouté à 484 le premier terme 2, ce qui fait 486, ce nombre ſera le dernier terme, après quoi on trouvera quel eſt le nombre des termes de cette progreſſion, *ſup.* n. 98.

Cette réſolution paroît particuliere à cet exemple, mais elle ne l'eſt pas. Quand on connoit la raiſon qui regne dans une progreſſion, on peut, ſup. n. 92. *connoître la raiſon que le dernier terme moins le premier a avec tous les termes qui le précédent; ainſi on réſoudra en la même maniere de ce dixieme Problême, quelque autre exemple qu'on propoſe. Cependant nous en donnerons une réſolution plus générale dans le VII. Livre, connoiſſant le premier & le ſecond terme avec la ſomme de la progreſſion, mais ſans faire aucune attention à la raiſon qui y regne.*

ELE-

ELEMENS DES MATHEMATIQUES, OU TRAITÉ DE LA GRANDEUR EN GENERAL.

LIVRE QUATRIEME.

Des Raiſons compoſées que les Puiſſances & toutes les Grandeurs de pluſieurs Dimenſions peuvent avoir entre elles.

SECTION PREMIERE.

Des Raiſons compoſées, & de leurs proprietez.

CHAPITRE PREMIER.

On peut nombrer les Raiſons, & faire par elles toutes les operations de l'Arithmetique, auſſi bien que par les nombres.

NOUS n'avons proprement conſideré dans le Livre précédent, où nous avons parlé des Raiſons, que ce qu'une grandeur eſt par rapport

port à d'autres Grandeurs avec qui on la compare. Examinons maintenant les raiſons ou rapports d'une maniere abſolue, c'eſt-à-dire conſiderons les raiſons en elles-mêmes comme des Grandeurs abſolues. Conſiderons par exemple la raiſon double, la raiſon triple, & toutes les autres raiſons. J'apperçois que les raiſons ainſi conſiderées peuvent être nombrées, qu'elles ſont capables des Operations de l'Arithmetique, qu'on peut ajouter une raiſon avec une autre raiſon, par exemple une raiſon double avec une autre raiſon, ou double, ou triple, &c. qu'on peut ôter une raiſon double d'une raiſon triple : qu'on peut prendre la raiſon double tant de fois, par exemple trois fois, & la multiplier ainſi par 3, ce qui fait une raiſon ſextuple ; ou diviſer une raiſon ſextuple par 3, de laquelle diviſion le quotient eſt une raiſon double. Raiſon n'eſt qu'une maniere de contenir ou d'être contenu ; ainſi je puis regarder cette maniere comme une grandeur, puiſqu'elle eſt capable d'être diminuée & d'être augmentée. Les nombres, ſi nous conſiderons bien leur nature, ne ſont que des rapports ou raiſons. Quand on dit que cette Tour a cent pieds de haut, que celle-ci n'en a que quatre-vingts, on compare ces deux Tours : on conſidere le rapport ou la raiſon qu'elles ont avec un pied, & enſuite on dit que l'une eſt plus grande, ayant cent parties telles que la plus petite n'en a que quatre-vingts : de ſorte que ces mots *cent*, *quatre-vingts*, ne marquent qu'un certain rapport. Lors qu'on entreprend de nombrer, l'on convient premierement d'une commune meſure, & on commence par une partie qui eſt commune aux choſes qu'on veut nombrer. Dans l'exemple des

deux

deux Tours, on convient d'une certaine meſure, qui eſt la grandeur d'un pied. Il faut auſſi en nombrant les raiſons, les réduire premierement, de maniere qu'elles ayent un terme connu, qui ſoit comme leur commune meſure. Nous allons voir que cela ſe peut faire; après quoi les Operations de l'Arithmetique ſe font ſur les raiſons avec la même facilité que ſur les nombres. Ainſi on concevra clairement qu'on peut compoſer une raiſon de pluſieurs raiſons, comme on peut compoſer un nombre de pluſieurs autres nombres par l'addition ou par la multiplication.

On pourroit faire les mêmes réflexions ſur *les Differences*, conſiderant qu'*une difference* peut être compoſée de pluſieurs *differences*. Il eſt bien évident que l'excès ou le défaut des deux grandeurs qu'on compare enſemble peuvent être nombrez, ajoutez, ſouſtraits les uns des autres, ſe multiplier & diviſer. On peut dire que la difference de 10 à 15 a cinq fois la difference de 9 à 10: qu'ôtant la difference de 14 à 15 de la difference de 11 à 15, on a la difference de 9 à 12. Cela eſt trop clair pour s'y arrêter, & on ne tireroit aucune utilité d'un plus long diſcours ſur cette maniere.

Pour donner une idée encore plus claire de ce que c'eſt que Raiſon compoſée, il faut conſiderer qu'on peut rappeller toutes les Raiſons à une comme meſure, c'eſt-à-dire les exprimer de maniere qu'on les puiſſe comparer avec une même grandeur, & par ce moyen connoitre ce qu'elles ſont les unes au regard des autres. Cela ſe fait en leur donnant un même conſéquent, ſi elles en ont de differens, car par exemple dans les deux raiſons de 3 à 12 & de 4 à 12, où les deux antécédens 3 & 4 ont pour conſéquent un

même nombre qui est 12, on voit clairement le rapport de ces deux raisons : que celle de 3 à 12 est quatruple, que celle de 4 à 12 est triple, & qu'ainsi la raison de 3 à 12 est à celle de 4 à 12 comme 3 à 4. Or pour donner un même conséquent à deux raisons, à celle de b à c, & à celle de f à g, je multiplie les termes de la premiere par le conséquent de la derniere ; c'est-à-dire b & c par g, ce qui fait bg, cg, qui sont en même raison que b & c, Liv. III. p. 63. Je multiplie de même les termes de la seconde raison par le conséquent de la premiere raison, c'est-à-dire f & g par c, ce qui fait cf & cg, qui est, selon ce qu'on vient de dire, une même raison que celle de f à g.

$$\left.\begin{matrix} b. & c. \\ f. & g. \end{matrix}\right\} :: \left.\begin{matrix} bg \\ cf \end{matrix}\right\} cg$$

Ces deux raisons $b.\ c.$ & $f.\ g.$ étant ainsi réduites à celle-ci de bg à cg, & de cf à cg, elles ont un même conséquent, savoir cg.

Soient ces deux raisons en nombres, 3. 7. & 5. 11. Il les faut réduire de sorte que ces deux raisons n'ayent qu'un même conséquent, afin qu'on connoisse mieux le rapport qu'elles ont entre elles. Je multiplie donc 1°. 3 & 7 par 11, ce qui fait 33 & 77. 2°. Je multiplie 5 & 11 par 7, ce qui fait 35 & 77 ; ainsi les deux raisons de 5 à 7, de 5 à 11 sont réduites à celles-ci, qui ont un même conséquent. On voit que ces deux raisons proposées sont comme ces nombres 33 & 35 ; après quoi operant sur ces exposans, les ajoutant, les multipliant, on est censé ajouter, multiplier ces raisons ; ce que je remarque pour faire comprendre comment les operations de l'Arithmetique se peuvent faire sur les raisons ; car il n'est pas nécessaire pour cela de les réduire de maniere qu'el-

$$\left.\begin{matrix} 33 \\ 35 \end{matrix}\right\} 77$$

qu'elles ayent un même conſéquent. Comprenons ſeulement ici qu'il n'eſt pas plus difficile de faire les operations de l'Arithmetique ſur les raiſons que ſur les nombres, qui ne ſont eux-mêmes, comme je l'ai dit, que des raiſons. S'il faut ajouter une raiſon triple avec une raiſon double, j'ajoute 2 & 3 qui ſont leurs expoſans, ce qui fait 5 expoſant de la raiſon quintuple. S'il faut ôter la raiſon double de la raiſon triple, j'ôte 2 de 3, & il reſte 1 expoſant de la raiſon d'égalité. S'il faut multiplier la raiſon triple par la raiſon double, je multiplie 2 & 3 leurs expoſans l'un par l'autre, le produit eſt 6, qui eſt l'expoſant de la raiſon ſextuple. Ainſi le produit de la raiſon double multipliée par la raiſon triple, eſt la raiſon ſextuple. On voit de même que la raiſon ſextuple étant diviſée par la raiſon triple, le quotient de cette diviſion eſt une raiſon double.

Ce que je dis des raiſons qui ont pour expoſant des nombres, convient aux raiſons ſourdes, dont on peut trouver les expoſans, comme nous avons vu, & enſuite operer ſur ces expoſans: car, comme on l'a démontré, deux raiſons quelles qu'elles ſoient ſe peuvent réduire de maniere qu'elles n'ayent qu'un même conſéquent, & alors leurs antécédens ſont leurs expoſans, ſur leſquels on peut faire les operations d'Arithmetique, comme ſur les nombres abſolus qui ſont comme les antécédens de pluſieurs raiſons, qui ont toutes un même conſéquent, ſavoir l'unité. En chemin faiſant nous pouvons démontrer cette Propoſition.

Deux raiſons ſont entre elles comme le produit des extrêmes eſt au produit des moyens, c'eſt-à-dire *comme le produit du premier antécédent par le ſecond conſéquent eſt au produit du ſecond*

antécédent par le premier conſéquent.

Soient ces deux raiſons de b à c, & de f à g, elles ſe réduiſent à celles-ci. La raiſon de b à c à celle de bg à cg, & celle de f à g à celle de cf à cg. Ces raiſons ayant un même conſéquent, ſavoir cg, elles ſont entre elles comme bg eſt à cf, qui eſt ce que dit cette Propoſition; car bg eſt le produit des extrêmes, & cf celui des moyens.

Je n'ai parlé ici des Operations Arithmetiques ſur les Raiſons, que pour faire comprendre ce que nous allons dire des Raiſons compoſées dans ce quatrieme Livre; car le Livre ſuivant eſt entierement employé à parler de ces Operations.

CHAPITRE II.

Ce que c'eſt que Raiſon compoſée.

Définitions & Axiomes touchant les Raiſons compoſées.

2 CE mot *Compoſer* eſt équivoque, auſſi-bien que ce mot *Raiſon compoſée*; car comme une Grandeur peut être compoſée en deux manieres, de deux ou de pluſieurs Grandeurs, ſavoir ou par l'addition, ou par la multiplication de ces Grandeurs; auſſi une Raiſon ſera compoſée de pluſieurs autres Raiſons, ou parce qu'elle eſt égale à la ſomme de ces Raiſons, comme la Raiſon quintuple eſt égale à la Raiſon double jointe à la triple, ou parce qu'elle eſt faite par la multiplication de ces Raiſons, comme la Raiſon ſextuple eſt faite de la Raiſon double multipliée par la triple.

L'uſa-

L'uſage l'a ainſi voulu, que lorsque l'on dit qu'une Raiſon eſt compoſée de deux Raiſons, que par exemple la Raiſon de deux plans eſt compoſée de celles de leurs deux racines, on entend que ces deux Raiſons étant multipliées l'une par l'autre, elles font la raiſon des deux plans, comme on le démontrera. Ainſi l'uſage ôte l'équivoque de ce mot, *Raiſon compoſée.*

Premiere Definition.

Une Raiſon eſt compoſée lorſqu'elle eſt faite de deux ou de pluſieurs Raiſons multipliées les unes par les autres. 3

Ainſi la Raiſon ſextuple eſt appellée Compoſée, lorſqu'on conſidere que cette raiſon eſt faite de la raiſon double multipliée par la raiſon triple.

Seconde Definition.

On appelle Raiſons compoſantes, celles dont la multiplication a produit une Raiſon compoſée. 4

Ainſi la raiſon triple & la raiſon double ſont les raiſons compoſantes de la raiſon ſextuple, qui a été compoſée par la multiplication de ces deux raiſons.

Troisieme Definition.

Une Raiſon compoſée de deux Raiſons égales, s'appelle Raiſon doublée de chacune de ces Raiſons. 5

La raiſon de 2 à 8 eſt compoſée de deux raiſons égales, de 2 à 4, & de 4 à 8. Cette raiſon de 2 à 8 eſt doublée.

Quatrieme Definition.

Une Raiſon compoſée de trois Raiſons égales, s'appelle Raiſon triplée de chacune de ces Raiſons. 6

Cinquieme Definition.

7 *Une Raiſon compoſée de quatre Raiſons égales eſt une Raiſon quatruplée, ainſi de ſuite.*

Raiſon doublée n'eſt pas la même choſe qu'une raiſon double, ni une raiſon triplée n'eſt pas la même choſe qu'une raiſon triple, &c. Ce que vous remarquerez dans la ſuite.

Axiome premier.

8 *Des Raiſons ſont cenſées être multipliées les unes par les autres, lorſque l'on multiplie leurs expoſans les uns par les autres.*

Cette Propoſition eſt évidente après ce qu'on a remarqué ci-deſſus, que lorſqu'on a réduit des raiſons à un même conſéquent, & qu'ainſi on a trouvé des grandeurs qui expoſent les raiſons que ces raiſons ont les unes avec les autres, on peut faire ſur elles toutes les operations de l'Arithmetique, comme ſur des grandeurs abſolues.

Axiome second.

9 *Les Raiſons compoſées ſont égales, lorſque les Raiſons compoſantes ſont égales.*

Cela eſt évident, les Touts ſont égaux qui ont des parties égales. Des nombres égaux ajoutez ou multipliez de la même maniere font des ſommes égales, ou des produits égaux.

CHAPITRE III.

Théorêmes & Problêmes touchant les Raiſons compoſées.

Lemme premier.

10 *Pluſieurs grandeurs étant de ſuite, la ſuivante étant plus grande que celle qui la précede, l'expo-*

poſant de la raiſon de la premiere à la ſeconde, multipliant celui de la raiſon de la ſeconde à la troiſieme, produit l'expoſant de la raiſon de la premiere à la troiſieme, & cet expoſant multipliant celui de la raiſon de la troiſieme à la quatrieme, produit celui de la raiſon de la premiere à la quatrieme; ainſi de ſuite.

Soient ces grandeurs de ſuite b, c, d, f, l'expoſant de la raiſon de b à c ſoit nommé q, c'eſt-à-dire le quotient de c diviſé par b. Celui de la raiſon de c à d ſoit nommé p, il faut prouver que pq ſera l'expoſant de la raiſon de b à d. Pour cela conſiderez que $qb=c$, Liv. III. n. 54. Et puiſque p eſt le quotient de d diviſé par c, ou par qb égal à c: Donc $qpb=d$, Liv. III. n. 54. Or le quotient de qpb diviſé par b eſt qp, partant qp eſt l'expoſant de la raiſon de b à d, ſelon la Définition qui a été donnée de l'expoſant d'une raiſon; ce qu'il falloit démontrer.

Soit nommé y l'expoſant de la raiſon de d à f; donc $yqpb=f$. Or ayant diviſé $yqpb$ par b, le quotient eſt yqp, qui eſt le produit des quotiens qp & y: Donc l'expoſant de la raiſon de b à f eſt fait par la multiplication des expoſans des raiſons des grandeurs interpoſées; ce qu'il falloit prouver.

LEMME SECOND.

Une Raiſon eſt compoſée des Raiſons dont les expoſans en ſe multipliant font ſon expoſant. 11

Soit cette raiſon de b à f dont l'expoſant ſoit qpy, fait de q expoſant de la raiſon de b à c, & de p expoſant de la raiſon de c à d, & de y expoſant de la raiſon de d à f; je dis que la raiſon de b à f eſt compoſée de celles de b à c, de c à d, & de d à f; car par la définition une raiſon eſt compoſée,

lorsqu'elle eſt faite de deux ou de pluſieurs raiſons multipliées les unes par les autres. Or par le premier Axiome *ſup.* n. 8, ces raiſons ſe multiplient en multipliant leurs expoſans. Donc, &c.

Premiere Proposition.

Premier Théorême.

12 *La Raiſon d'une grandeur à une autre grandeur, eſt compoſée des Raiſons des grandeurs interpoſées.*

Soient ces grandeurs b, c, d, f; entre b & f ſont interpoſées c, d. Il faut démontrer que la raiſon de b à f eſt compoſée de la raiſon de b à c, de celle de c à d, & de celle de d à f. Cela eſt, ſelon le ſecond Lemme, ſi l'expoſant de la raiſon de b à f eſt égal au produit des expoſans de ces raiſons; or ſelon ce que nous avons fait voir dans le premier Lemme, l'expoſant de la raiſon de b à f eſt fait par la multiplication des expoſans des raiſons des grandeurs interpoſées; il leur eſt donc égal, & partant cette Propoſition eſt bien démontrée.

Seconde Proposition.

Second Théorême.

13 *Dans une Progreſſion Géometrique, la Raiſon du premier terme au ſecond eſt ſimple, du premier au troiſieme doublée, du premier au quatrieme triplée: ainſi de ſuite.*

Cette Propoſition peut être conçue en cette autre maniere.

Dans une Progreſſion Géometrique, la Raiſon de deux termes entre leſquels il y a deux intervalles, eſt doublée; s'il y a trois intervalles, triplée.

Cela eſt manifeſte. La progreſſion géometrique

que est une continuation de la même raison; partant puisque la raison d'un terme à un autre, est composée des raisons des termes interposez entre ces deux termes par la Proposition précédente, & que la raison du premier terme au second, & celle du second au troisieme sont égales, il faut, par la troisieme Définition, que la raison du premier terme au troisieme soit une raison doublée. Ainsi la raison du premier au quatrieme terme étant composée de trois raisons égales, est une raison triplée.

Cette même démonstration montre qu'entre deux termes d'une progression, tels qu'ils soient, s'il y a deux intervalles, la raison de l'un à l'autre est doublée, étant faite de deux raisons égales; s'il y a trois intervalles, triplée, étant faite de trois raisons égales, &c.

TROISIEME PROPOSITION.

Théorême troisieme.

Plusieurs Raisons étant données, si on multiplie les antécédens par les antécédens, & les conséquens par les conséquens, les deux produits de ces deux multiplications seront l'un à l'autre en raison composée de ces raisons. 14

Soient d'une part b & c, de l'autre part d & f, Si on multiplie l'antécédent b par l'antécédent d, ce qui fait bd, & le conséquent c par le conséquent f, ce qui fait cf; je dis que la raison de ces deux produits bd & cf sera composée de la raison de b à c, & de celle de d à f.

Pour démontrer cette vérité, prenons une des deux racines du produit bd, ou b ou d; & une autre des deux qui ont produit cf, ou c, ou f, prenant la plus petite ou la plus grande, de sorte que le produit des deux racines qu'on au-

sa choisies soit plus grand ou plus petit que l'un de ces produits *bd* & *cf*, & qu'il se rencontre ainsi interposé entre deux. Je prens *e* & *d*, & multipliant ces deux racines l'une par l'autre, cela fait *ed*, que je suppose être entre *bd* & *cf*: ainsi voilà trois grandeurs qui se suivent, *bd. ed. cf.* Selon ce qui a été démontré, *bd. ed* :: *b. e.* & *ed. cf* :: *d. f.* Liv. 3 n. 63.

Or *sup.* n. 12. la raison de *bd* à *cf* est composée de celle de *bd* à *cd*, & de celle de *cd* à *cf*. Donc elle est aussi composée de celle de *b* à *c*, & de celle de *d* à *f* qui sont les mêmes. Soit une troisieme raison de *g* à *h*: je multiplie *bd* par *g*, & *cf* par *h*; donc selon ce qu'on vient de dire, la raison de *bdg* à *cfh*, est composée de celles de *bd* à *cf* & de *g* à *h*. Ainsi la raison de *bdg* à *cfh* est composée des trois raisons de *b* à *c*, de *d* à *f*, de *g* à *h*, &c. ce qu'il falloit démontrer.

Proposition quatrieme.

Problême premier.

Deux ou plusieurs Raisons étant données, trouver la Raison composée dont elles sont les Raisons composantes.

Soient les raisons de *b* à *c*, & *d* à *f*, il faut trouver la raison composée dont elles sont les composantes. Pour cela on doit multiplier les antécédens l'un par l'autre, & les conséquens l'un par l'autre; la raison de ces produits qui seront *bd* & *cf*, est une raison composée de ces deux raisons, par la Proposition précédente. Si on avoit encore une troisieme raison comme celle de *g* à *h*, les deux premieres ayant composé celle qui est entre *bd* & *cf*, il ne faut plus que multiplier l'antécédent *g* par *bd*, ce qui fait *bdg*; & le conséquent *h* par *cf*, ce qui fait *cfh*.

Par

Par la Proposition précédente, la raison de *bdg* à *efh* est composée de celle de *g* à *h*, & de celle de *bd* à *ef*.

S'il y avoit une quatrieme raison que l'on voulût joindre avec celle-là, il faudroit multiplier *bdg* par l'antécédent de cette raison, & *efh*, par le conséquent de cette quatrieme raison; la raison des produits seroit composée des quatre raisons données.

Ainsi on voit comment on peut trouver une raison composée de tant de raisons qu'on voudra, lorsque ces raisons seront données.

CHAPITRE IV.

Des Règles de Trois & de Compagnie composées.

1°. De la Règle de Trois composée.

QUelquefois on cherche un quatrieme terme qui soit à une raison composée de plusieurs autres raisons, comme est un autre terme à une autre raison composée. Par exemple, dans cette Question. C'est la coutume de payer 4 écus pour des marchandises du poids de 200 livres, qui ont été apportées de 100 lieues. On demande, combien on doit de port pour des marchandises qui pesent 300 livres, lorsqu'elles sont apportées de 400 lieues? 16

Il est manifeste que l'on cherche un quatrieme terme que je nomme *x*, qui ne soit pas seulement proportionnel à la distance du chemin, mais ensemble au poids des marchandises. Ainsi pour résoudre cette Question & celles qui seront semblables, il faut trouver la raison composée de celle du poids au poids, & de celle de la distance

à la distance. Selon l'hypothese $\left.\begin{matrix}200\\100\end{matrix}\right\}\ 4::\ \left\{\begin{matrix}300\\400\end{matrix}\right.x$

c'est-à-dire qu'on cherche la valeur d'une certaine somme d'argent, x, qui soit au poids 300 livres, & à la distance 400 livres, comme 4 écus est au poids de 200 livres, & à la distance de 100 livres. Or la raison composée de ces deux raisons se trouve par la Proposition précédente en multipliant les antécédens l'un par l'autre, & les conséquens l'un par l'autre, savoir 200 par 100, & 300 par 400; ce qui donne d'un côté 20000, & de l'autre 120000. Après cela on voit évidemment que le terme inconnu x est à 120000, comme 4 écus est à 20000.

20000. 4. :: 120000. x.

Ainsi pour achever la résolution de cette Question, puisque ces trois nombres 20000. 4. 120000. sont les trois premiers termes d'une proportion, je multiplie le troisieme par le second, c'est-à-dire 120000 par 4, ce qui produit 480000, que je divise par le premier terme 20000, le quotient de cette division est 24, qui sera le quatrieme terme de cette proportion, & le nombre des écus qui doivent être payez pour le port de 300 livres apportées de 400 lieues, ce qu'on cherchoit. La valeur de x est ainsi 24.

On peut chercher un troisieme terme qui soit à une raison composée de 3, de 4 raisons, comme un terme donné est à une autre raison composée d'autant de raisons.

Par la Proposition précédente, vous avez appris à trouver les raisons composées, dont les raisons composantes sont données; ainsi il n'est pas nécessaire que j'enseigne plus au long comment ces Questions peuvent être résolues.

Mais je ne veux pas oublier qu'on peut pro-

po-

poſer des Queſtions dans leſquelles le terme inconnu ſoit à une raiſon compoſée, comme un terme donné eſt à une raiſon ſimple.

Par exemple, un Ouvrier ayant par un travail de deux jours gagné 20 écus ; on demande combien ce même Ouvrier doit gagner pour avoir travaillé 20 jours, & outre cela pour avoir fourni un cheval pendant tout ce tems-là ?

Il faut premierement conſiderer combien cet Ouvrier pour ſa ſeule peine doit recevoir, qui ſera 200 écus.

Après cela il faut ſavoir ce qu'on donne à un Loueur de chevaux par chaque jour, ſi c'eſt l'ordinaire de lui payer 20 ſols, cet Ouvrier outre ces 200 écus, doit recevoir 20 livres.

De la Regle de Compagnie comqoſée.

17 Dans la Règle de Compagnie ſimple, on cherche un terme qui ait une raiſon donnée à un terme donné : mais dans celle qui eſt compoſée, on cherche un terme qui ait une raiſon donnée à une raiſon compoſée.

Quatre Marchands ont gagné en commun 240 livres, le premier avoit donné 20 écus pour 4 mois, le ſecond 40 pour 5 mois, le troiſieme 60 pour 6 mois, le quatrieme 80 écus pour 7 mois ; le gain d'un chacun doit être proportionné à la raiſon compoſée de celle de l'argent à l'argent, & de celle du tems au tems.

La premiere choſe qu'on doit donc faire, c'eſt de trouver les raiſons compoſées de ces raiſons, & pour cela il faut multiplier l'argent d'un chacun par le tems durant lequel on a prêté ſon argent, ce qui produit ces quatre nombres 80, 200, 360, 560, chacun de ces nombres eſt à chaque autre, par exemple 80 à 200, en raiſon

composée de celle de 20 écus à 40 écus, & de celle de 4 mois à cinq mois; ainsi des autres.

Après cela j'ajoute ces quatre nombres dans une somme qui sera 1200. Or comme cette somme 1200 est à 240, qui est le gain général, ainsi 80 sera au gain particulier du premier, 200 au gain du second, 360 au gain du troisieme, 560 au gain du quatrieme. On trouvera tous ces gains particuliers par la Règle de Trois simple, multipliant le second terme de cette proportion par le troisieme, & en divisant le produit par le premier, de laquelle division le quotient sera le quatrieme terme inconnu qu'on cherche.

Ces quatriemes termes ou ces quatre gains particuliers se trouvent être par cette operation 16 livres pour le gain du premier, 40 livres pour le gain du second, 72 livres pour le gain du troisieme, & 112 livres pour le gain du quatrieme.

$$1200.\ 240 :: \begin{cases} 80 & 16 \\ 200 & 40 \\ 360 & 72 \\ 560 & 112 \end{cases}$$

Lorsqu'on a bien compris une fois la théorie de l'Arithmetique, les exemples ne sont pas nécessaires: ainsi je ne suis pas obligé de dire plus au long ce qu'il faudroit faire dans une Règle de Compagnie, où la grandeur des gains ou des pertes dépend, non seulement d'une raison composée de deux raisons, mais de 3, de 4, &c. On voit bien qu'il faut premierement trouver ces raisons composées, & ensuite faire ce qui a été enseigné touchant la Règle de Compagnie simple dans le troisieme Livre.

SEC

SECTION SECONDE.

Des Raiſons qu'ont entre elles les Puiſſances & les Grandeurs de pluſieurs dimenſions.

PROPOSITION CINQUIEME.

Théorême quatrieme.

DEux Grandeurs de pluſieurs dimenſions qui ont quelques-unes de leurs racines égales & les autres inégales, ſont entre elles comme les inégales. 18

Soient ces deux grandeurs *bc* & *dc*, qui ont une de leurs racines égales, ſavoir *c*; il faut prouver que *bc. dc* :: *b. d.* ce qui eſt manifeſte; car Liv. III. n. 63. les produits de deux grandeurs qui ont été multipliées par une troiſieme grandeur, ſont entre eux comme ces grandeurs. Or les grandeurs *bc* & *dc* ſont produites par *b* & *d* multipliées par la même grandeur *c*, partant *bc. dc* :: *b. d.* Soient ces deux grandeurs *bbc* & *dbc*, je dis que *bbc. dbc* :: *b. d.* car ces grandeurs *bbc* & *dbc* ſont produites de la multiplication des grandeurs *b* & *d* par une même grandeur, ſavoir *bc*. Ainſi par la même Propoſition *bbc. dbc* :: *b. d*; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Le produit de deux Grandeurs eſt un moyen proportionnel entre les quarrez de ces Grandeurs. 19

Soient ces deux grandeurs *b* & *d*, dont le produit eſt *bd*. Le quarré de *b* eſt *bb*, celui de *d* eſt *dd*, je dis que ∴ *bb, bd. dd.* ce que je prouve.

Par

Par la derniere Proposition $\left.\begin{matrix} bb. & bd \\ bd. & dd \end{matrix}\right\} :: b. d.$

Donc *bb. bd :: bd. dd.* Liv. III. n. 57. Donc $\div\div$ *bb. bd. dd.* qui est ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE 2.

20 *Le produit des racines quarrées de deux quarrez est un moyen proportionnel entre ces quarrez.*

C'est-à-dire que $\div\div$ *bb. bd. dd.* ce qui a été démontré; car la racine de *bb* est *b*, celle de *dd* est *d*; ainsi *bd* est le produit de ces racines. Ce Corollaire est le même que le précédent, énoncé d'une autre maniere.

COROLLAIRE 3.

21 *Deux cubes comme* xxx *&* yyy *étant donnez, si on multiplie le quarré de la racine du premier par la racine cube du second, ce qui fait* xxy, *& le quarré de la racine du second par la racine cube du premier, ce qui fait* yyx, *je dis que ces deux produits seront moyens proportionnels entre les cubes donnez.*

$\div\div$ xxx. xxy. yyx. yyy.

Par la derniere Proposition $\left.\begin{matrix} xxx. & xxy. \\ xxy. & yyx :: \\ yyx. & yyy \end{matrix}\right\} x. y.$

Donc Liv. III. n. 57.

xxx. xxy :: xxy. yyx :: yyx. yyy.

Donc $\div\div$ *xxx. xxy. yyx yyy.*

COROLLAIRE 4.

22 *Entre deux quarrez de quarrez comme* a^4 *&* b^4, *ces trois produits* a^3b, aabb. ab^3, *sont trois moyens proportionnels. Entre* a^3 *&* b^3, *ces quatre produits* a^4b, a^3bb, aab^3, ab^4, *sont quatre moyens proportionnels; ainsi de suite des autres puissances.*

Ce

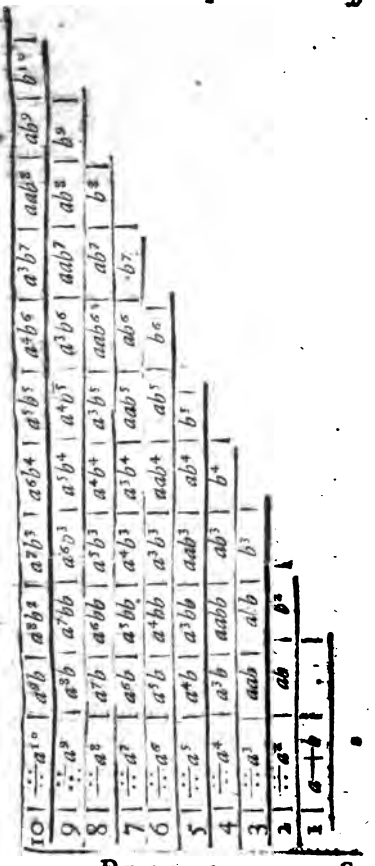
Ce qui ſe prouve par la démonſtration qui a été employée dans les deux Corollaires précédens, & qui ſe peut appliquer à toutes ces puiſſances. Ainſi je ne propoſerai toutes ces veritez que par les expreſſions ſuivantes, qui font connoitre combien de moyens proportionnels ſe trouvent entre deux puiſſances, ſelon que les racines de ces puiſſances ſont multipliées les unes par les autres, de la maniere qu'on le peut remarquer dans la Table ſuivante.

Avis ſur cette Table.

Cette Table repréſente la grandeur complexe $a+b$ élevée à differens degrez juſqu'au dixieme, ſon premier degré eſt $a+b$, ſon ſecond $aa+2ab+bb$, ou $a^2+2ab+b^2$; mais on ne voit point dans cette Table les *coëfficiens*, c'eſt ainſi qu'on appelle par exemple ce nombre 2 mis devant le plan ab; car comme on a vu entre les quarrez a^2 & b^2, il y a un double plan qui a pour racine celle de ces deux quarrez. Ainſi ſi on élevoit $a+b$ au troiſieme degré entre a^3 & b^3, il y auroit le triple de deux ſolides, dans leſquels ce nombre 3 eſt *coëfficient*; ce que nous dirons en ſon lieu plus exactement. Or il eſt évident qu'après avoir ôté ces coëfficiens, ce qui reſte ſont des grandeurs qui ſont en progreſſion, comme on le vient de voir dans les Corollaires précédens $\div a^2.ab.b^2$. ainſi des autres degrez, ce qu'il ſera facile de prouver d'un chacun ſelon l'énoncé de ce quatrieme Corollaire. 23

Remarquez auſſi que les expoſans des puiſſances d'une même grandeur font une progreſſion Arithmetique. $a^1.a^2.a^3.a^4.a^5.a^6$. &c. Ainſi pour trouver l'expoſant du produit de deux puiſſances, par exemple de a^2 multiplié par a^3. il faut

faut ajouter dans une somme les exposans 2 & 3, ce qui fait 5 exposant du produit de ces deux puissances. Comme il est évident $aa = a^2$. $aaa = a^3$. $aaaa = a^4$. $aaaaa = a^5$, comme aussi le quarré de a^2 c'est a^2 multiplié par a^2; pour avoir l'exposant de ce quarré, il faut ajoutet 2. à 2, ce qui fera a^4. Ainsi l'exposant du quarré de a^3 est a^6, celui du quarré de a^4 est a^8.



PROPOSITION SIXIEME.

Théorême cinquieme.

Les plans sont les uns aux autres en raison composée de leurs racines. 24

Soient

Soient deux plans donnez *bd* & *cf*, je dis que leur raiſon eſt compoſée de celle de *b* à *c*, & de celle de *d* à *f*. Le premier plan *bd* eſt produit par la multiplication des antécédens *b* & *d* de ces deux raiſons, & *cf* le ſecond plan eſt fait par la multiplication des conſéquens *e* & *f*; Donc par la Propoſition 3e *bd* eſt à *cf* en raiſon compoſée de *b* à *c*, & de celle de *d* à *f*.

COROLLAIRE.

25 *Les quarrez ſont entre eux en raiſon doublée de celles de leurs racines.*

bb & *dd* ſont deux quarrez qui ſont l'un à l'autre en raiſon compoſée de celle de *b* à *d*, & de celle de *b* à *d*. Or ces deux raiſons ſont égales: Donc par la 3e Définition, la raiſon compoſée de *bb* à *dd* eſt doublée.

PROPOSITION SEPTIEME.

Théorême ſixieme.

26 *La raiſon d'un ſolide à un autre ſolide eſt compoſée des raiſons que leurs racines ont entre elles.*

bdc & *fgb* ſont deux ſolides. Il faut prouver que la raiſon du premier au ſecond eſt compoſée de ces trois raiſons, de *b* à *f*, de *d* à *g*, de *c* à *h*. Le premier eſt fait de la multiplication des antécédens de ces trois raiſons qui ſont *b*, *d*, *c*, & le ſecond eſt fait des trois conſéquens, *f*, *g*, *h*, multipliez de la même maniere: Donc par la 3e Propoſition la raiſon de *bdc* à *fgb*, eſt compoſée de ces trois raiſons.

COROLLAIRE.

27 *Les cubes ſont entre eux en raiſon triplée de celles de leurs racines.*

bbb, *ccc*, ſont deux cubes. Par la préſente Propoſition la raiſon du premier au ſecond eſt compoſée des trois raiſons de *b* à *c*, de *b* à *c*, de *b* à *c*. Or ces trois raiſons ſont égales : Donc par la 4e Définition la raiſon qu'elles compoſent eſt une raiſon triplée.

PROPOSITION HUITIEME.

Théorême ſeptieme.

Les quarrez de quarrez ſont en raiſon compoſée de leurs racines, & cette raiſon eſt quatruplée; ainſi des autres Puiſſances. 28

Cette Propoſition ſe prouve comme les deux précédentes. Les quatriemes Puiſſances ont leurs quatre racines égales ; ainſi la raiſon qu'elles ont entre elles eſt quatruplée. Il en eſt de même des autres puiſſances. Il eſt évident que les cinquiemes puiſſances ſont en raiſon quintuplée de celle de leurs racines, les ſixiemes en raiſon ſextuplée ; ainſi de ſuite.

PROPOSITION NEUVIEME.

Théorême huitieme.

Lorſque des Grandeurs ſont proportionnelles, leurs quarrez & leurs cubes, & toutes leurs puiſſances ſont proportionnels ; de même, lorſque les puiſſances ſont proportionnelles, les racines le ſont auſſi. 29

Si $a. b :: c. d.$ je dis que $\begin{cases} a^3. b^3. :: c^3. d^3. \\ a^4. b^4. :: c^4. d^4. \\ a^5. b^5. :: c^5. d^5. \\ a^2. b^2. :: c^2. d^2. \end{cases}$

La raiſon de *aa* avec *bb*, & celle de *cc* avec *dd*, eſt doublée d'une même raiſon, ſavoir de celle de *a* avec *b*, & de *c* avec *d*. La raiſon de *aaa* avec

avec *bbb*, & celle de *ccc* avec *ddd*, ſont triplées de cette même raiſon de *a* avec *b*, & de celle de *c* avec *d*; ainſi les raiſons compoſantes étant égales par l'Axiome ſecond, les compoſées ſeront égales.

La converſe de cette Propoſition eſt manifeſte, qui eſt que lors que des quarrez ou des cubes ſont proportionnels, leurs racines ſont proportionnelles.

Corollaire.

30 *Les quarrez, les cubes, & les autres puiſſances des termes d'une progreſſion, ſont en progreſſion.*

Puiſque les quarrez & les cubes de grandeurs proportionnelles ſont proportionnels, ſi la proportion des grandeurs eſt continue, il eſt évident que celle de leurs quarrez & de leurs cubes doit être auſſi continue.

Si $\div\div a.\ b.\ c.$ il faut que $\begin{cases} \div\div aa.\ bb.\ cc. \\ \div\div aaa.\ bbb.\ ccc. \\ \div\div a^4.\ b^4.\ c^4. \\ \div\div a^5.\ b^5.\ c^5. \end{cases}$

Proposition Dixieme.

Théorême neuvieme.

31 *Toutes les puiſſances ou degrez d'une même Grandeur rangez de ſuite ſont en progreſſion.*

Soit *a* élevé à ſes puiſſances qui ſoient ici rangées de ſuite, $a^1.\ a^2.\ a^3.\ a^4.\ a^5.\ a^6.\ a^7.$ &c c'eſt une même raiſon qui regne; car diviſant la puiſſance qui ſuit par la précédente, c'eſt toujours le même quotient qui eſt ici *a*. Par conſéquent ſelon la Definition de la progreſſion, cet ordre des puiſſances rangées ſelon leur degré fait une progreſſion.

Pro-

PROPOSITION ONZIEME.

Théorême dixieme.

En toute progreſſion Géometrique, les quarrez de deux termes qui ſe ſuivent immédiatement, ſont entre eux comme le premier terme à celui qui ſuit le ſecond. 32

Soit ∴ *b. c. d. f.* &c. je dis que *bb. cc* :: *b. d.* Car *ſup.* n. 25 la raiſon de *bb* à *cc* eſt doublée de la raiſon de *b* à *c.* qui eſt la même que celle de *c* à *d.* Or *ſup.* n. 13. la raiſon de *b* à *d* eſt compoſée de ces deux mêmes raiſons : Donc par le ſecond Axiome *ſup.* n. 9. il y a même raiſon entre *bb* & *cc.* qu'entre *b* & *d*; donc *bb. cc* :: *b. d.*

PROPOSITION DOUZIEME.

Théorême onzieme.

Dans une progreſſion Géometrique, le cube du premier terme eſt au cube du ſecond, comme le premier terme eſt à celui qui ſuit le troiſieme. 33

Soit ∴ *b. c. d. f* &c. je dis que *bbb. ccc* :: *b. f.* la raiſon de *bbb* à *ccc* eſt triplée de celle de *b* à *c.* qui eſt la même que celle de *c* à *d*, de *d* à *f. ſup.* n. 27. Or la raiſon de *b* à *f* eſt compoſée de ces trois mêmes raiſons *ſup.* n. 13. Donc celle de *bbb* à *ccc* eſt égale a celle de *b* à *f.*

Ce Théorême donne le moyen de doubler un cube; car puiſque bbb. ccc :: b. f; *pour trouver un cube double de* bbb, *il faut prendre le double de* b. *& entre* b *& ce double que je nomme* f, *trouver*, c *& d deux moyens proportionnels. On va voir comment ces moyens ſe trouvent. Si f eſt le double de* b, *le cube de* c *ſera le double du cube de* b.

PRO-

PROPOSITION TREIZIEME.

Theorême douzieme.

34 *Dans une progreſſion Géometrique, le quarré de quarré du premier terme, eſt à la même puiſſance du ſecond, comme le premier terme eſt à celui qui ſuit le quatrieme: ainſi des autres puiſſances.*

Cette Propoſition ſe prouve comme les deux précédentes. Il en eſt de même des autres puiſſances. La cinquieme puiſſance du premier terme eſt à la cinquieme puiſſance du ſecond, comme le premier terme eſt à celui qui ſuit le cinquieme; ainſi de ſuite.

PROPOSITION QUATORZIEME.

Problême ſecond.

35 *Trouver un moyen proportionnel entre deux grandeurs données.*

Il faut multiplier les deux grandeurs données l'une par l'autre, la racine quarrée de ce produit ſera un moyen proportionnel entre ces deux grandeurs. Liv. III. n. 86. Ainſi les deux grandeurs données étant *b* & *c*, la racine quarrée *bc* ſera un moyen proportionnel entre *b* & *c*. Si l'on cherche un moyen entre 2 & 18, je multiplie donc 2 par 18, ce qui fait 36, la racine quarrée de ce produit qui eſt 6, ſera un moyen proportionnel entre 2 & 18.

Autrement.

Si les deux nombres donnez ſont quarrez comme le ſont 4 & 16, il faut prendre la racine de l'un & de l'autre; celle de 4 eſt 2, celle de 16 eſt 4, le produit de 2 par 4 qui eſt 8, ſera moyen proportionnel entre 4 & 16, par le premier ou ſecond Corollaire de la 5e Propoſition *ſup.* n. 19 ou 20.

PRO-

PROPOSITION QUINZIEME.
Problême troisieme.

Trouver deux moyens proportionnels entre deux grandeurs données. 36

Cette Proposition est quelquefois impossible aussi-bien que la précédente, quand il s'agit de nombres. Nous verrons en quel cas, lors que nous parlerons des incommensurables.

Soient ces deux nombres 2 & 16, entre lesquels il faut trouver deux moyens proportionnels. J'appelle ces moyens *m* & *n*, ainsi ÷ 2. *m*. *n*. 16. Le cube de 2 qui est 8, est à m^3. comme 2 est à 16. *sup.* n. 33. Ainsi

8. m^3 :: 2. 16. ou 2. 16 :: 8. m^3.

Voilà donc une proportion de quatre termes dont les trois premiers sont connus. Je trouve la valeur du cube m^3, multipliant 16 par 8, ce qui fait 128, que je divise par 2 premier terme de cette proportion, le quotient est 64; qui sera la valeur de m^3. La racine cube de 64 est 4; donc *m* premier moyen proportionnel vaut 4. Je cherche ensuite par la Proposition précédente un moyen proportionnel entre 4 & 16, qui est 8. Donc *n* vaut 8; ainsi j'ai trouvé entre 2 & 16 deux moyens proportionnels; ce qui étoit proposé.

Autrement.

Si les nombres donnez sont des cubes comme 8 & 64, je prens leurs racines cubiques qui sont 2 & 4, je multiplie le quarré de la premiere racine 2 par la seconde, c'est-à-dire 4 par 4, ce qui produit 16, & le quarré de la seconde racine 4 par la premiere racine, c'est-à-dire 16 par 2, ce qui fait 32. Or ÷ 8. 16. 32. 64. *sup.* n. 21.

Proposition Seizieme.

Problême quatrieme.

37 *Entre deux grandeurs données, trouver tant de moyens proportionnels qu'on voudra.*

Soient ces deux grandeurs b & l, on propose de trouver cinq moyens proportionnels, savoir $c. d. f. g. h.$ Comme b est à l, la sixieme puissance de b est à la sixieme puissance de c, premier moyen proportionnel. *Sup.* n. 34. Donc

$$b. \quad l. :: b^6. \quad c^6.$$

Ainsi on trouvera la valeur de c^6, qui est le quatrieme terme de cette proportion, dont les trois premiers termes sont connus. Ce premier moyen étant connu on trouvera le second; car $c. l. :: c^5. d^5$. *Sup.* n. 34. La valeur de d étant connue, on trouvera celle de f; car $d. l. :: d^4. f^4$. ainsi de suite.

Autrement.

Il faut extraire les racines des puissances des grandeurs données, entre lesquelles on veut trouver plusieurs moyens proportionnels, ensuite multiplier ces racines, comme il a été dit *sup.* n. 22.

L'on ne peut pas toujours exprimer par nombres la valeur de ces moyens proportionnels. Nous verrons dans le sixieme Livre quand est-ce que cela se peut & ne se peut pas faire.

Proposition Dix-septieme.

Théorême treizieme.

38 *Si deux grandeurs chacune de deux dimensions sont égales, les deux racines de la premiere seront réciproques à celles de la seconde*, c'est-à-dire, *qu'elles seront ou les extrêmes, ou les moyens d'une proportion de quatre termes.*

Si

Si *bf* & *cd* sont deux grandeurs égales, leurs racines *b*, *f*, *c*, *d*, sont réciproques, c'est-à-dire, que *b* est à *c* comme *d* est à *f*, ce qui est évident; car on a démontré Livre III. n 69, que lors que quatre grandeurs sont tellement rangées que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, ces grandeurs sont proportionnelles.

Proposition Dix-huitieme.

Théorême quatorzieme.

Dans une proportion de quatre termes, le produit 39
des moyens ou des extrêmes est moyen proportionnel entre le produit des antécédens, & celui des conséquens.

Si *b. c :: d. f.* il faut que, *bd*, *cd* :: *b*, *c*, & *cd*, *cf* :: *d. f*: *sup.* n. 18: Donc *bd*, *cd* :: *cd*, *cf*, ou ::: *bd*, *cd*, *cf*: donc *cd* produit des moyens, est moyen proportionnel entre *bd* produit des antécédens, & *cf* produit des conséquens. On peut démontrer de la même maniere que *bf* est moyen proportionnel entre *bd* & *cf*.

Proposition Dix-neuvieme.

Théorême quinzieme.

Dans une proportion de quatre termes, les quar- 40
rez des deux termes de l'une ou de l'autre raison sont entre eux, comme le produit des antécédens est au produit des conséquens.

Je suppose que *b*, *c* :: *d*, *f*. La proposition est que *bb*, *cc* :: *bd*, *cf*; ce qui se démontre aisément. Puisque *b*, *c* :: *d*, *f*: donc *b*, *d* :: *c*, *f*. Donc par la cinquieme proposition ci-dessus *bb*, *bd* :: *b*, *d* & *cc*, *cf* :: *c*, *f*. Donc puisque la raison de *c* à *f* est la même que celle de *b* à *d*, ainsi *bb* *bd* :: *cc*, *cf*, & partant *bb*, *cc* :: *bd*, *cf*, qui est ce qu'il falloit prouver. On peut faire une infinité

de propositions semblables, qu'il sera également facile de résoudre.

Proposition Vingtieme.

Problême cinquieme.

41 *Trouver la somme des quarrez de chaque terme d'une progression.*

Soit cette progression ÷÷ a, b, c, d, f, g, b; je suppose que q est le quotient du second terme divisé par le premier; ainsi selon ce qui a été enseigné, je réduis cette progression à celle-ci.

÷÷ $a.\ aq.\ aq^2.\ aq^3.\ aq^4.\ aq^5.$

Voici les quarrez de cette progression qui font une progression, *sup.* n. 30.

÷÷ $aa.\ aaq^2.\ aaq^4.\ aaq^6.\ aaq^8.\ aaq^{10}.$

Cette seule expression découvre le moyen de résoudre la question. Car il ne s'agit que de chercher la somme de cette progression dont on connoit le premier, le second & le dernier terme, & de combien de termes elle est composée: cette somme se trouve comme il a été enseigné par la 24e Proposition du Livre III.

Proposition Vingt-unieme.

Théorême seizieme.

42 *Dans une progression* ÷÷ c, d, f, g, *l'un de ces termes* c *sera à* f *comme la somme des quarrez de* c *&* d *est à la somme des quarrez de* d *&* f.

C'est-à-dire que $c, f :: cc + dd. dd + ff$; ce qu'il est facile de démontrer. Car *sup.* n. 32, $cc\ dd :: c, f$, & $dd, ff :: d, g$. Or la raison de d à g est la même que celle de c à f: donc ajoutant à cc & à dd des grandeurs qui ayent même raison, $cc + dd, dd + ff :: cc, dd$. Liv. III. n. 58. Partant $cc + dd, dd + ff :: c, f$: Ce qu'il

qu'il falloit démontrer, & ce qui donne jour pour démontrer pluſieurs Théorêmes ſemblables, comme ceux-ci qui ſuivent.

PROPOSITION VINGT-DEUXIEME.

Théorême dix-ſeptieme.

Comme c *eſt à* g, *la ſomme des cubes de* c, *de* d, *de* f *eſt à la ſomme des cubes de* d, *de* f, *de* g. 43

PROPOSITION VINGT-TROISIEME.

Théorême dix-huitieme.

Comme c *eſt à* f, *le quarré de* c + d *eſt au quarré de* d + f. 44

Comme c *eſt à* g, *le cube de* c + d + f *eſt à celui de* d + f + g.

PROPOSITION VINGT-QUATRIEME.

Theorême dix-neuvieme.

Comme c *eſt à* f, *ainſi la difference des quarrez de* c *&* *de* d *eſt à la difference des quarrez de* d *&* *de* f. 45

La démonſtration de ce dernier Théorême eſt encore facile. Puiſque *cc*, *dd* :: *c*, *f*. & *dd* *ff* :: *c*, *f*: donc Livre III. n. 60, ôtant de *dd* & de *ff* les grandeurs *cc* & *dd* qui ont même raiſon, ils demeureront en même raiſon, *dd* — *cc*. *ff* — *dd* :: *c*, *f*. Or *dd* — *cc* eſt la difference de *cc* & de *dd*, comme *ff* — *dd* eſt la difference de *dd*, & de *ff*.

ELEMENS DES MATHEMATIQUES, OU TRAITÉ DE LA GRANDEUR EN GENERAL.

LIVRE CINQUIEME.

Des Fractions & des Opérations Arithmetiques sur les Fractions & sur les Raisons.

SECTION PREMIERE.

Préparations pour faire les Opérations de l'Arithmetique sur les Fractions & sur les Raisons.

CHAPITRE PREMIER.

Les Fractions sont des manieres d'exprimer une Raison; ainsi les Fractions sont des Raisons.

1 LEs Fractions, ou nombres rompus, ne sont rien autre chose que des manieres d'exprimer la raison qu'ont deux ou plusieurs nombres entre-

entre eux ; ce sont ainsi des raisons. C'est pourquoi je m'étonne qu'un très-habile homme ait dit, qu'autrefois on n'avoit pas pris garde qu'on pouvoit faire toutes les Operations Arithmetiques sur les raisons, puisque de tout tems on a ajouté, on a soustrait, on a multiplié & divisé des fractions qui ne sont que des raisons.

Les expressions en quoi consistent les fractions sont fort naturelles, c'est-à-dire qu'elles sont propres pour marquer ce qu'on veut qu'elles expriment. On appelle fraction par exemple cette expression $\frac{5}{6}$ qui marque qu'une grandeur entiere a été rompue en 6 parties, ou qu'elle a 6 parties dont on ne prend que cinq. Cette expression, dis-je, $\frac{5}{6}$ est propre pour marquer une raison ; car *Raison*, comme on l'a dit souvent, c'est une maniere de contenir ou d'être contenu ; ce qu'on connoit par la division, qui fait voir combien de fois une grandeur est dans une autre : C'est pourquoi le quotient de la division de deux grandeurs est l'exposant de leur raison. Or on a vu que le signe général de la division étoit une petite ligne sur laquelle on mettoit la grandeur à diviser, & dessous le diviseur ; comme pour diviser b par c on écrit $\frac{b}{c}$. Le quotient de b divisé par c étant donc $\frac{b}{c}$, cette expression est propre pour marquer la raison de b à c. Par la même raison, $\frac{5}{6}$ étant une marque qu'il faut concevoir que 5 est divisé par 6, cette expression marque la raison de 5. à 6.

Nous avons dit dès le premier Livre, que lorsque le diviseur étoit plus grand que le nombre à diviser, il le falloit mettre sous ce nombre. Par exemple, que pour diviser 5 par 6, on devoit

écrire $\frac{5}{6}$. On voit à préſent la raiſon de cette règle. On appelle cette expreſſion une fraction; parce que, comme on le va dire, on ſuppoſe que chaque unité du reſte du nombre à diviſer eſt rompue en autant de parties qu'il y a d'unitez dans le diviſeur. Par exemple, ſi 5 ſont cinq écus qui reſtent à diviſer, ou à partager à ſix perſonnes; comme chacune ne peut pas en avoir un écu, puiſqu'il n'y en a que 5, on conçoit que chaque écu eſt diviſé en 6 parties dont, chacune vaut 10 ſols; ainſi cette expreſſion $\frac{5}{6}$ dit que cinq écus étant diviſez a ſix perſonnes, chacune a cinq parties telles que l'écu en vaut ſix. Vous voyez donc pourquoi on appelle ces expreſſions *des Fractions*, & que $\frac{5}{6}$ eſt un nombre rompu, à cauſe que 6 eſt un nombre qui marque l'unité rompue en ſix parties. C'eſt ce que nous allons expliquer avec ſoin, & fort aiſément; car tous les principes ont été établis, puiſque ces fractions ne ſont que des raiſons.

CHA-

CHAPITRE II.

Définitions & explications des termes. Axiomes ou Propoſitions évidentes touchant les Fractions.

PREMIERE DEFINITION.

FRaction eſt une expreſſion qui exprime le rapport de la partie, d'un nombre entier, qui eſt rompu & diviſé en tant de parties qu'on a voulu, avec ce nombre entier. 1

Soit *a* une grandeur entiere, par exemple une toiſe; ayant rompu ce nombre entier *a* en 12 parties, on met, comme on l'a dit, ce nombre 12, qui marque en combien de parties la grandeur *a* ou le nombre 1 eſt rompu, ſous une petite ligne ou barre en cette maniere $\frac{1}{12}$. Après pour exprimer le nombre des parties de *a*, ſoit la ſixieme, ſoit la quatrieme, ou quelque autre partie que ce ſoit, on met deſſus cette ligne ou barre, le nombre des parties qu'on veut exprimer, en cette maniere $\frac{6}{12}$ ou $\frac{4}{12}$. Cette fraction $\frac{6}{12}$ vaut 6 parties de *a*, telles que *a* en vaut 12. Cette fraction $\frac{4}{12}$ vaut 4 parties telles que toute la grandeur *a* en vaut 12.

SECONDE DEFINITION.

Dans une fraction les nombres qui ſont ſous la ligne s'appellent Dénominateurs de la fraction, parce qu'ils font connoître en combien de parties l'entier eſt rompu ou partagé; ainſi ces nombres donnent le nom à la fraction. 3

Dans cette fraction $\frac{3}{4}$, le nombre 4 qui eſt ſous la ligne, eſt le dénominateur de cette fraction, parce que faiſant connoître que l'entier dont $\frac{3}{4}$ eſt la fraction, eſt rompu en 4 parties, il donne le nom à la fraction; car ſi $\frac{3}{4}$ eſt la fraction d'un écu, on dira que cette fraction vaut trois quarts d'écu.

TROISIEME DEFINITION.

4. *Dans une fraction le nombre qui eſt ſur la ligne s'appelle le Numerateur.*

Dans cette fraction $\frac{3}{4}$, le nombre 3 qui eſt ſur la ligne eſt appellé le numerateur de cette fraction, parce qu'il nombre les parties que vaut cette fraction de l'entier qui eſt rompu en 4 parties, ſavoir $\frac{3}{4}$ de la grandeur *a*: c'eſt-à-dire les trois quarts de cette grandeur *a*.

QUATRIEME DEFINITION.

5. *Fractions de fractions ſont des nombres qui expriment les parties de la partie d'un entier.*

Soit *a* un écu, ſoit *b* moitié de cet entier *a*, le nombre qui exprimera quelques parties de *b*, ſera un nombre doublement rompu. Ces fractions de fractions s'expriment en cette maniere. La premiere fraction qui vaut la moitié de *a*, ſe doit exprimer ainſi $\frac{1}{2}$; & puiſque cette moitié eſt rompue encore en deux parties, il faut rompre le premier numerateur 1 en deux parties, ce qui fera $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire une moitié d'une moitié. Ainſi comme une ſimple fraction exprime la raiſon d'une partie à ſon tout, une fraction de fraction exprime la raiſon d'une partie de partie à la grandeur entiere.

On

On pourroit rompre une troiſième fois cette ſeconde fraction, diſant une moitié, d'une moitié d'une moitié, $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$, & pourlors ce ſeroit une fraction de fraction de fraction; ainſi à l'infini.

1. Axiome ou Demande.

Le dénominateur d'une fraction vaut toujours un entier. 6

Dans cette fraction $\frac{1}{4}$, le dénominateur 4 vaut un entier, puiſqu'il montre en combien de parties l'entier eſt diviſé, & qu'il exprime toutes ſes parties, leſquelles priſes enſemble égalent le tout ou l'entier.

2. Axiome ou Demande.

Lors que le numerateur eſt égal à ſon dénominateur, il vaut un entier; s'il eſt plus petit, il vaut moins qu'un entier; s'il eſt plus grand, il vaut davantage. 7

Dans cette fraction $\frac{4}{4}$, le numerateur 4 vaut un entier, puiſqu'il comprend toutes les parties du dénominateur.

Dans cette fraction $\frac{2}{4}$, le numerateur 2 vaut moins que ſon dénominateur 4, parce qu'il ne vaut que 2 parties telles que 4 en vaut 4.

Dans cette fraction $\frac{6}{4}$, le numerateur 6 vaut plus que ſon dénominateur, parce qu'il vaut 6 parties telles que 4 n'en vaut que 4.

3. Axiome ou Demande.

Les fractions ne ſont que l'expreſſion de la raiſon qui eſt entre un tout & ſa partie. 8

Par exemple $\frac{1}{4}$ d'un écu. Cette fraction exprime la valeur d'un nombre qui a la même

raiſon à un écu entier, que celle qui eſt entre ces deux nombres 3 & 4.

4. Axiome ou Demande.

9 *Quoi qu'on ajoute ou qu'on retranche du numerateur & du dénominateur d'une fraction, la valeur en ſera la même, ſi la même raiſon demeure entre le numerateur & le dénominateur devant & après ce changement.*

Cette Propoſition eſt une ſuite de la précédente; puiſqu'une fraction eſt une raiſon, la valeur ſera la même ſi c'eſt une même raiſon. Ainſi $\frac{3}{4}$ & $\frac{6}{12}$ & $\frac{7}{10}$ ne valant que la moitié de l'entier mis en fraction, pendant que le numerateur ſera la moitié du dénominateur, la fraction vaudra toujours la moitié de l'entier. Six parties de douze parties ne diſent pas autre choſe que deux parties de quatre parties, cinq parties de dix parties. Toutes ces expreſſions ſignifient une même choſe, ſavoir la moitié d'un même tout, dont il eſt queſtion.

CHAPITRE III.

Préparations nécessaires pour faire les opérations de l'Arithmetique sur les Fractions & Raisons.

PROPOSITION PREMIERE.

Problême premier.

REduire un tout en ses parties.

Il faut multiplier le tout par le nombre 10
des parties dans lesquelles on le veut réduire.

Soient 10 écus que l'on veut réduire en sols. Chaque écu est composé de 60 sols, je multiplie donc 10 par 60, le produit de cette multiplication qui est 600, sera le nombre de sols que valent 10 écus; ce qui est clair. Car si un écu vaut 60 sols, il faut que 10 écus valent 10 fois 60 sols.

COROLLAIRE 1.

Par le moyen de cette Proposition on donne le 11
même nom à deux grandeurs differentes, ce qui fait connoitre plus clairement leur rapport.

Car, par exemple, comparant un écu avec 40 sols, si l'on réduit un écu en ses parties qui sont 60 sols, on apperçoit plus clairement la raison de 40 sols à 60 sols, que d'un écu à 40 sols.

COROLLAIRE 2.

On peut évaluer les monnoyes & les mesures. 12

Evaluer une grande monnoye ou une grande mesure, c'est exprimer la valeur d'une monnoye ou d'une mesure par une autre espece de monnoye plus connue, ou une autre espece de mesure plus connue.

On veut savoir combien 100 écus d'or valent de sols ; il faut multiplier 100 écus par 114 sols, qui étoient autrefois les parties d'un écu d'or, le produit 11400 sera la valeur de 100 écus d'or, qui valent ainsi 11400 sols.

On veut savoir combien 100 toises valent de pieds. Les parties connues d'une toise sont 6 pieds : je multiplie 100 par 6, le produit qui est 600 pieds sera la valeur de 100 toises.

COROLLAIRE 3.

13 *On peut réduire un entier à une fraction dont le nom est donné.*

Le dénominateur de la fraction est 6. On veut réduire ce nombre entier à une fraction dont le dénominateur soit 6 : il faut multiplier 4 par 6 ce qui sera 24, & écrire 6 sous 24. Cette fraction $\frac{24}{6}$ vaudra 4 entiers, car le numérateur 24 contient 4 fois le dénominateur 6 qui vaut un entier.

Pour réduire la grandeur a dans une fraction dont le dénominateur soit d, suivant ce que nous venons de dire, je multiplie a par d, ce qui fait ad, que je place au dessus d'une ligne sous laquelle je place d en cette maniere $\frac{ad}{d}$. De même pour réduire cette grandeur a dans une fraction dont $a+b$ soit le dénominateur, je multiplie a par $a+b$, le produit est $aa+ab$, sous lequel je place $a+b$ de cette sorte $\frac{aa+ab}{a+b}$.

COROLLAIRE 4.

14 *Pour réduire un entier en fraction, il ne faut qu'é-*

qu'écrire le nombre donné au dessus d'une ligne, & l'unité au dessous.

Par exemple, pour exprimer en fraction un écu, j'écrirai $\frac{1}{1}$ d'écu; car le numerateur étant égal au dénominateur, par le second Axiome $\frac{1}{1}$ vaut un écu. Ainsi pour réduire la grandeur x en fraction, j'écris $\frac{x}{1}$, car divisant x par 1, le quotient est x: partant $\frac{x}{1}$ est égal à x, c'est-à-dire à la grandeur entiere.

Remarquez que pour marquer la partie d'une grandeur exprimée par des lettres qu'on ne peut pas diviser comme des chiffres, l'on met à côté une fraction avec des chiffres qui expriment la valeur de la partie qu'on veut signifier; ainsi pour exprimer la quatrieme partie de aa, j'écris $\frac{1}{4}$ aa.

Seconde Proposition.

Problême second.

Rappeller les parties à leur tout. 15

Il faut divifer le nombre des parties données par le nombre qui marque combien leur entier les contient de fois. Par exemple, pour réduire 600 sols en écus; puisque 60 sols font un écu, je divise 600 par 60, le quotient 10 montre que 600 sols valent 10 écus, puisque ce nombre de sols vaut 10 fois 60 sols.

Corollaire I.

Par le moyen de cette Proposition on donne un même nom à deux grandeurs differentes; ce qui fait que l'on découvre plus clairement leur rapport. 16

Soient données ces deux grandeurs, 600 deniers

niers & 100 sols, je donne le même nom à ces deux sommes, en réduisant les deniers en sols ; ce que je fais en divisant 600 par 12, qui est le nombre des deniers qui font un sol : le quotient de cette division qui est 50, fait connoitre que 600 deniers valent 50 sols. Le rapport de 50 sols à 100 sols est plus sensible, que celui de 600 deniers à 100 sols.

Corollaire 2.

17 *L'on peut réduire les petites monnoyes à de plus grandes, & les évaluer, c'est-à-dire voir ce qu'elles valent au regard de celles qui sont plus grandes.*

Je veux savoir combien 600 deniers valent de sols, 12 deniers font un sol, je divise 600 par 12, le quotient de cette division 50 sera 50 sols, valeur de 600 deniers.

Je veux savoir combien 120 pieds font de toises : 6 pieds font une toise : je divise 120 par 6, le quotient qui est 20, marque que 120 pieds valent 20 toises.

Corollaire 3.

18 *L'on peut réduire une fraction en nombres entiers, & connoitre combien elle vaut d'entiers.*

Je suppose que cette fraction vaille tout au moins un entier. Par exemple, soit cette fraction $\frac{24}{4}$. Je divise 24 numerateur par le dénominateur 4 ; le quotient de cette division 6 fera connoitre que $\frac{24}{4}$ vaut 6 entiers ; car 24 doit valoir autant d'entiers que 4 est contenu dans 24, selon le second Axiome ci-dessus ; ainsi étant contenu 6 fois dans 24, cette fraction vaut 6 entiers.

TROISIEME PROPOSITION.

Problême troisieme.

Réduire à un même dénominateur ou à un même conséquent plusieurs fractions ou raisons. 19

C'est la même chose que de réduire deux raisons à des expressions, où elles ayent un même conséquent; ce qu'on a enseigné ci-dessus page 210.

Soient ces deux fractions ou raisons $\frac{2}{5}$ & $\frac{3}{4}$, on veut les réduire à un même dénominateur, c'est-à-dire faire qu'elles ayent un même conséquent, & par conséquent un même nom, sans toutefois rien changer de leur valeur.

$$\frac{2}{5}\quad\frac{3}{4}\qquad\frac{8}{20}\quad\frac{15}{20}$$

Il faut multiplier le dénominateur de la premiere par le dénominateur de la seconde, le produit sera le commun dénominateur que j'écris sous une ligne. Après il faut multiplier le numerateur de la premiere par le dénominateur de la seconde. Dans cet exemple 2 par 4, le produit 8 sera le numerateur de la premiere. Enfin le numerateur de la seconde par le dénominateur de la premiere, c'est-à-dire 3 par 5, dont le produit 15 sera le numerateur de la seconde; car le numerateur 2 & le dénominateur 5 de cette fraction $\frac{2}{5}$, ont été multipliez par le même nombre, savoir 4; le numerateur & le dénominateur de la fraction $\frac{3}{4}$, ont aussi été multipliez par le même nombre 5. Ainsi Liv. III. n. 63. 8 est à 20 comme 2 à 5, & 15 est à 20 comme 3 à 4; Donc par l'Axiome 4e. ci-dessus ce sont les mêmes fractions

$$\frac{2}{5}\ \frac{8}{20}\quad\&\quad\frac{3}{4}\ \frac{15}{20}$$

S'il

S'il falloit réduire plusieurs fractions à un même dénominateur, il faudroit réduire premierement les deux premieres à un même dénominateur, après les réduire toutes trois en cette maniere. Soit donnée $\frac{1}{5}$ une troisieme fraction; les deux fractions $\frac{2}{5}$ & $\frac{3}{4}$, ayant déja été réduites à celle-ci $\frac{8\ 15}{20}$; je multiplie 20 par 6 ce qui fait 120, qui sera le dénominateur commun des trois fractions; après je multiplie 8 par 6, ce qui fera 48, qui sera le numerateur de la premiere fraction, & 15 par 6, ce qui fait 90, qui sera le numerateur de la seconde fraction; enfin je multiplie 5 numerateur de la troisieme fraction, par 20 dénominateur des deux premieres fractions, cela fait 100 numerateur de cette troisieme; ainsi ces trois fractions sont réduites à celles-ci $\frac{48\ 90\ 100}{120}$, qui ont un même conséquent ou un même dénominateur, & qui sont toujours les mêmes que les autres $\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}$, puisque ce sont les mêmes raisons.

Soient données ces deux fractions $\frac{b}{x}$ & $\frac{c}{z}$. Si on suit la règle précédente, c'est-à-dire qu'on multiplie les dénominateurs x & z l'un par l'autre, & le numerateur de la premiere par le dénominateur de la seconde, b par z, & le numerateur de la seconde par le dénominateur de la premiere, c par x, elles feront réduites à ces deux fractions ou raisons qui ont le même conséquent, ainsi le même nom $\frac{zb}{zx}$ & $\frac{xc}{zx}$.

Co-

COROLLAIRE I.

Par le moyen de cette Proposition on peut connoître sensiblement le rapport de deux fractions differentes. 20

Soient ces deux fractions $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$: je veux connoître l'excès de l'une par dessus l'autre : je les réduis à ces deux fractions suivantes, qui ont un même dénominateur ou conséquent $\frac{10}{20}$ & $\frac{7}{20}$ qui sont les mêmes. Après quoi je vois clairement que la premiere est plus petite que la seconde de sept parties, telles que la grandeur entiere exprimée par le dénominateur 20 en contient 20. Ayant réduit ces deux raisons $\frac{b}{x}$ & $\frac{e}{x}$ à celles-ci $\frac{bz}{xz}$ & $\frac{ex}{xz}$ qui ont un même dénominateur ou même conséquent, on voit plus sensiblement quel est leur rapport.

COROLLAIRE 2.

Deux raisons étant données, on peut connoître quelle est la plus grande & quelle est la plus petite. 21

Pour entendre en quoi consiste cet excès d'une raison par dessus une autre raison, il faut remarquer que la raison étant une maniere d'être d'une grandeur à l'égard des grandeurs avec qui elle est comparée, ce qui se dit d'une raison s'entend particulierement du premier terme qui est comparé : Ainsi lors que l'antécédent d'une raison est plus grand à l'égard de son conséquent, que l'antécédent d'une autre raison à l'égard de son conséquent, la premiere raison est plus grande que la seconde. Pour donc remarquer sensiblement cet excès, il faut donner aux deux antécédens de ces deux raisons le même conséquent.

séquent, en les réduisant au même nom. Ainsi ces deux raisons $\frac{2}{7}$ & $\frac{4}{9}$ étant données, les ayant réduites à ces deux raisons qui ont un même conséquent $\frac{18\ 28}{63}$, l'on apperçoit clairement que la premiere raison est plus petite que la seconde, puisque 18 est plus petit au regard de 63, que 28 au regard du même nombre 63.

Lemme Premier.

22 *Trouver la plus grande commune mesure, ou le plus grand commun diviseur de deux nombres donnez.*

On appelle commune mesure ou commun diviseur de deux nombres, un troisieme nombre, par lequel les deux premiers peuvent être divisez exactement.

Pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres donnez, il faut ôter le plus petit du plus grand.

Premier Cas.

Si l'excès du plus grand mesure exactement le petit, il sera le commun diviseur de tous deux, & le plus grand de tous les communs diviseurs de ces deux nombres.

Soient donnez *b* 25 & *d* 30, ôtant 25 de 30 l'excès de *d* par dessus *b* est 5; & parce que 5 mesure 25, je dis qu'il mesurera 30, & que c'est le plus grand commun diviseur de *b* & de *d*.

Puisque *d* ne surpasse *b* que d'une fois 5, si 5 est 5 fois dans 25, il faut qu'il soit encore une fois dans *d*; ainsi il le mesure exactement, & il est le plus grand commun diviseur des deux nombres donnez; ce que je démontre.

re. Supposons qu'il y en ait un *c* qui soit plus grand, examinons si cette supposition est possible. Puisque *d* surpasse *b*, il faut que *c* soit plus de fois dans *d* que dans *b*. Or ce nombre *c* sera ou plus grand, ou plus petit, ou égal à 5, qui est l'excès de *d* par dessus *b*. S'il est plus grand, il ne mesurera par exactement *d* & *b*; s'il est plus petit, ou qu'il lui soit égal, il ne sera donc pas un plus grand & commun diviseur de *b* & de *d*, que ce nombre 5: la supposition étoit ainsi impossible.

Second Cas.

Si l'excès du plus grand nombre par dessus le plus petit ne mesure pas le plus petit, il faut retrancher cet excès du plus petit jusqu'à ce qu'on ait trouvé un nombre qui mesure le plus petit nombre, ce qui se comprendra mieux par un exemple. Soient donnez 21 & 27, l'excès de 27 par dessus 21 qui est 6, ne mesure pas 21. Je retranche cet excès 6 de 21, il reste 15, qui ne mesure pas le plus petit nombre 6. Je retranche donc 6 de 15, reste 9; & de 9 je retranche encore une fois 6, le reste est 3, qui mesure exactement 6. Je dis que 3 est la commune & la plus grande mesure des nombres proposez 21 & 27. Car 1°. par la démonstration précédente, 3 est la commune & la plus grande mesure de 9 & de 6: Et puisque 15 surpasse 9 de 6, il faut que 3 soit la commune mesure de 9 & de 15, & la plus grande; car s'il y en avoit une autre plus grande, 3 ne seroit pas la plus grande mesure de 9 & de 6. L'on démontrera de la même maniere que 3 est la commune & la plus grande mesure de 15 & de 21, de 21 & de 27.

LEM-

Lemme Second.

23 *Trouver le plus petit nombre que peuvent mesurer deux nombres donnez.*

Si l'un des deux nombres donnez est mesuré par l'autre, il sera celui que l'on cherche. Soient donnez 3 & 6, le premier nombre 3 mesure 6; ainsi il est évident que 6 est le plus petit nombre qui puisse être mesuré par les deux nombres 3 & 6.

Si l'un des deux nombres donnez ne mesure pas l'autre, il faut les multiplier l'un par l'autre, & le produit sera le nombre qu'on cherche. Soient donnez 3 & 4: leur produit 12 est le plus petit nombre qui puisse être mesuré par 3 & par 4. Mais cela n'est vrai que lors que les deux nombres donnez n'excedent pas le plus grand chiffre 9, & qu'ils sont premiers entre eux. On dira dans la suite quels sont les nombres premiers: 6 & 4 ne sont pas premiers, aussi 6 multiplié par 4 fait 24. qui n'est pas le plus petit nombre que 6 & 4 mesurent, c'est le nombre 12. La règle générale que nous pouvons donner ici, c'est de trouver les deux plus petits nombres qui soient les exposans de leur raison. Comme si 8 & 12 étoient donnez, il faudroit prendre 2 & 3; après quoi multipliant le plus grand nombre par le plus petit exposant, & le plus petit par le plus grand des exposans, ce qui ne doit faire qu'un même produit, ce produit est ce que l'on cherche. Multipliant 8 par 3, & 12 par 2, le nombre 24, produit de l'une & l'autre multiplication, est le plus petit nombre que 8 & 12 divisent exactement.

Qua-

QUATRIEME PROPOSITION.
Problême quatrieme.

Réduire une fraction ou raiſon aux moindres termes. 24

Il faut diviſer le numerateur & le dénominateur de la fraction par leur plus grande commune meſure.

Soit cette fraction $\frac{30}{48}$, je diviſe 30 & 48 par 6, qui eſt la plus grande commune meſure de 30 & de 48, les quotiens 5 & 8 donneront la nouvelle fraction $\frac{5}{8}$; car Liv. III. n. 65, 5 eſt à 8 comme 30 eſt à 48. Donc par l'Axiome 4 ci-deſſus, les deux fractions $\frac{30}{48}$ & $\frac{5}{8}$ valent la même choſe. Or il eſt certain que cette fraction eſt réduite aux plus petits termes, car ayant diviſé 30 & 48 par 6. qui eſt leur plus grande & commune meſure, aucune autre diviſion ne peut donner de plus petits expoſans que les quotiens de cette diviſion, puiſque les plus grands diviſeurs donnent de plus petits quotiens. Après cette réduction l'on voit plus nettement le rapport du numerateur de cette fraction à ſon dénominateur, ou quelle eſt leur raiſon.

Les fractions & raiſons qui ſont exprimées par des lettres, ſe réduiſent facilement à de plus ſimples termes; car, ſelon ce qu'on a dit, que lors que les mêmes lettres ſe trouvent dans la grandeur à diviſer & dans le diviſeur, pour faire la diviſion il ne faut que retrancher les lettres ſemblables qui ſe trouvent également dans la grandeur à diviſer & dans le diviſeur; pour diviſer bx par x, il ne faut que retrancher x de la grandeur à diviſer bx,

bx, & *b* qui reſte eſt le quotient de cette diviſion.

Par conſéquent pour réduire à de plus ſimples termes la raiſon de *aac* à *acd*, ou la fraction $\frac{aac}{acd}$; je retranche du numerateur & du dénominateur les lettres qui ſe trouvent dans l'un & dans l'autre, ce qui donne cette fraction $\frac{a}{d}$ qui a la même valeur que $\frac{aac}{acd}$, c'eſt-à-dire, que la raiſon de *a* à *d* eſt la même que celle de *aac* à *acd*, car en faiſant ce retranchement, j'ai diviſé le numerateur *aac* & le dénominateur *acd* par un même diviſeur, ſavoir *ac*; Partant les quotiens *a* & *d* ſont en même raiſon que *aac* & *acd*.

Soit donné cette fraction $\frac{aac+aad}{cd+dd}$, en retranchant les lettres qui ſe trouvent dans le numerateur & dans le dénominateur, cette fraction ſe trouvera réduite à celle-ci $\frac{aa+aa}{d+d}$; & puiſqu'en retranchant de deux grandeurs propoſées deux autres grandeurs qui ont même raiſon, la même raiſon demeure après ce retranchement, on pourra encore réduire la fraction donnée à celle-ci $\frac{aa}{d}$. *aa* eſt à *d*, comme *aac* + *aad* eſt à *cd* + *dd*.

Lors que deux fractions ont un même dénominateur, pour les réduire à de plus ſimples termes, de telle ſorte qu'elles ayent toujours un commun dénominateur, il faut prendre garde de ne retrancher que les lettres qui ſe trouveront en même tems dans les deux numera-

merateurs & dans le dénominateur commun. Soient par exemple ces deux fractions qui ont un même dénominateur $\frac{bdcd}{aacdd}$ & $\frac{ac^3}{aacdd}$, je retranche simplement un c des numerateurs & du dénominateur commun, & reste $\frac{bdd}{aacd}$ & $\frac{c^2}{aacd}$. Si je n'avois pas voulu faire cette réduction de telle sorte que ces deux fractions eussent toujours le même dénominateur, je les aurois pu réduire à celles-ci $\frac{bd}{aac}$ & $\frac{c^2}{cd}$.

Cinquieme Proposition.

Problême cinquieme.

Réduire les fractions de fractions à une seule fraction.

Soit donnée cette fraction de fraction $\frac{b}{c}$ de $\frac{c}{z}$ le produit des dénominateurs c & z, qui est cz, sera le dénominateur de la fraction qu'on cherche; & le produit des numerateurs b & c qui est bc, sera le numerateur de cette fraction qui est ainsi $\frac{bc}{cz}$.

Par la définition des fractions de fraction, cette fraction de fraction donnée $\frac{b}{c}$ & $\frac{c}{z}$ exprime la raison de b partie de c à la grandeur entiere z, dont c est aussi partie. Partant Liv. IV. n. 13, la raison de b à z est composée de celle de b à c, & de celle de c à z. Or Liv. IV. n. 14, la raison de bc à cz est composée

de la raiſon de *b* à *c*, & de celle de *c* à *z*. Donc la raiſon de *bc* à *zc* eſt égale à celle de *b* à *z*, ce qu'on cherchoit. Car réduire une fraction de fraction dans une ſeule fraction, c'eſt exprimer tout d'un coup la raiſon de la partie de la partie à la grandeur entiere.

Soit donnée cette fraction de fraction $\frac{4}{8}$ de $\frac{5}{12}$, je multiplie 4 dénominateur de l'une par 8 dénominateur de l'autre, ce qui fait 32, & 2 numerateur de l'une par 5 numerateur de l'autre, ce qui fait 10, la fraction $\frac{10}{32}$ ſera égale à $\frac{4}{8}$ de $\frac{5}{12}$.

S'il y avoit des fractions de fraction de fraction de fraction, pour les réduire dans une ſeule fraction, par exemple, pour réduire dans une ſeule fraction cette fraction de fraction de fraction $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$ de $\frac{7}{8}$, je multiplie le dénominateur de la premiere par celui de la ſeconde 4 *par* 6, *ce qui fait* 24, *après je multiplie* 24 *par le dénominateur* 8 *de la derniere, ce qui fait* 192, *qui ſera le dénominateur de la fraction qu'on cherche.*

Je multiplie de la même maniere les numerateurs, le premier par le ſecond, ſavoir 3 *par* 5, *ce qui fait* 15, *& ce produit* 15 *par le troiſieme qui eſt* 7, *ce qui fait* 105, *qui ſera le numerateur de la fraction cherchée, qui eſt par conſéquent* $\frac{105}{192}$.

Sixieme Proposition.

Problême ſixieme.

26 *Evaluer une fraction, ou la réduire à des termes connus.*

Soit cette fraction $\frac{2}{3}$, qui vaut les deux tiers d'un écu : on veut l'évaluer, c'eſt-à-dire qu'on cherche combien cette fraction vaut de ſols.

Je

Je multiplie le numerateur 2 & le dénominateur qui est 3, par les parties connues d'un écu qui sont 60 sols, les produits 120 & 180 sont entre eux comme 2 à 3, & ayant divisé 120 & 180 par 3, le dénominateur de la fraction donnée, les quotiens 40 & 60 seront encore en même raison que $\frac{2}{3}$. Donc $\frac{2}{3}$ est égal $\frac{40}{60}$, c'est-à-dire que deux troisiemes d'écu valent 40 sols.

La multiplication du dénominateur n'est utile que pour la démonstration; ainsi pour résoudre la présente Proposition, il suffit de multiplier le numerateur de la fraction donnée par ses parties connues de la grandeur entiere proposée. Dans l'exemple proposé je multiplie 2 par 60 sols, qui sont les parties connues d'un écu, & je divise 120 produit de cette multiplication, par 3 le dénominateur de la fraction donnée; 40 qui est le quotient, est ce que je cherchois.

Avertissement.

Le produit du numerateur que l'on a multiplié par les parties connues de l'entier, étant divisé par le dénominateur de la fraction, si la division n'est pas exacte & qu'il reste une fraction, il faut encore évaluer ce reste, & continuer ces évaluations jusques à ce qu'il ne reste que des parties, ou connues ou si petites, que leur valeur ne soit pas considerable. Un exemple rendra cet Avertissement plus clair.

Soit cette fraction $\frac{3}{7}$ d'un écu, selon ce qui a été enseigné, je multiplie le numerateur 3 par les parties connues d'un écu qui sont 60 sols, le produit de cette multiplication est

180, que je divise par le dénominateur 7, le quotient est 25 plus $\frac{5}{7}$; partant $\frac{5}{7}$ d'un écu valent 25 sols plus $\frac{5}{7}$ de sols. Pour savoir maintenant ce que vaut cette fraction $\frac{5}{7}$, je multiplie le numerateur 5 par 12 dernieres parties connues d'un sol, le produit est 60 que je divise par 7, le quotient est 8 plus $\frac{4}{7}$, ainsi $\frac{5}{7}$ d'un sol vaut 8 deniers plus $\frac{4}{7}$ d'un denier; la valeur de cette fraction n'est pas considerable.

Septieme Proposition.
Problême septiéme.

27 *Diviser un petit nombre par un plus grand.*

Il faut écrire le plus grand sous le plus petit, ce qui donne une fraction qui exprime la valeur du quotient que l'on cherche.

Pour diviser 2 par 5 j'écris $\frac{2}{5}$. Si ce 2 marque deux écus qu'il faut partager à 5 hommes, chacun aura deux cinquiemes d'écu. Pour réduire ce nombre entier 2 à une fraction dont 5 soit le dénominateur, il faut *sup.* n. 13, multiplier 2 par 5, dont le produit 10 sera le numerateur de la fraction que l'on cherche, laquelle fraction $\frac{10}{5}$, vaut le nombre entier 2. Or pour partager 10 cinquiemes d'écus à 5 hommes, il est clair qu'il faut diviser 10 par 5, laquelle division doit avoir pour quotient le nombre entier 2, puisque le nombre 10 a été fait de 2 multiplié par 5. Ainsi en écrivant le plus grand nombre sous le plus petit, on fait en abregé deux opérations. Par la premiere, on réduit le nombre entier dans une fraction qui a pour dénominateur le diviseur. Par la seconde, on divise le numerateur de cette fraction par le diviseur proposé: Et tout

tout cela se fait, comme nous venons de le voir, avec un trait de plume.

Nous ne pouvions pas donner plutôt la démonstration de cette Opération, que nous avons proposée dans le premier Livre, en traitant de la Division des nombres entiers.

SECTION SECONDE.

Opérations Arithmetiques sur les Fractions & sur les Raisons.

AVERTISSEMENT.

NOus avons déja dit que lors que plusieurs raisons ont pour conséquent une même grandeur, la grandeur de chaque antécédent qui est relative à l'égard de son conséquent, peut être regardée comme absolue à l'égard des autres antécédens; car il est clair que plusieurs tiers d'une même grandeur, par exemple plusieurs tiers d'un écu, sont entre eux des grandeurs absolues. Pour donc ajouter 2 tiers à 3 tiers, il ne faut point d'autre règle que les ordinaires: deux tiers avec trois tiers font 5; mais aussi pour faire connoître que ce nombre 5 signifie 5 tiers de la grandeur dont il est parlé, il faut mettre dessous le conséquent, 3 qui est le dénominateur de cette fraction ou raison. Ainsi quand les raisons ou fractions proposées ont été réduites à un même nom ou à même dénominateur, ayant pour-lors un même conséquent, les opérations que l'on fait sur elles n'ont plus de difficultez. Raison & fraction sont une même chose; partant en montrant comment se font

les Opérations Arithmetiques sur les Fractions, on enseigne comment elles se doivent faire sur les Raisons.

Chapitre Premier.

De l'Addition, Soustraction, Multiplication, & Division des Fractions & des Raisons.

Huitieme Proposition.

Problême huitieme.

28 *Ajouter en une somme plusieurs fractions ou raisons.*

Il faut premierement les réduire à un même dénominateur, par la 3e Proposition. Soient $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}$, je les réduis à ces trois fractions ou raisons qui ont un même dénominateur ou conséquent $\frac{72\ 80\ 48}{96}$. J'ajoute en une somme les numerateurs 72, 80, 48, ce qui fait 200, sous lequel j'écris le dénominateur commun 96; ainsi $\frac{200}{96}$ est égal $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}$.

Quand il faut ajouter des nombres entiers avec des nombres rompus, il faut réduire les entiers à une fraction qui ait même nom que la fraction donnée, *sup.* n. 13; ainsi pour ajouter 6 avec $\frac{3}{8}$, je réduis 6 à une fraction qui ait pour dénominateur 8, qui sera $\frac{48}{8}$, cette fraction ajoutée avec $\frac{3}{8}$ fait $\frac{51}{8}$.

Les opérations qui se font sur les lettres sont encore plus faciles. Pour ajouter ces deux fractions ou raisons $\frac{aa}{c}$ & $\frac{bb}{c}$ en une seule somme, j'écris $\frac{aa+bb}{c}$. La raison de $aa+bb$ à c est

eſt égale aux deux raiſons de aa à c, & de bb à c, ajoutées en une ſomme.

Proposition Neuvieme.

Problême neuvieme.

Souſtraire une petite fraction ou raiſon d'une 29
plus grande fraction ou raiſon.

Soient $\frac{1}{4}$ & $\frac{8}{3}$, il faut retrancher $\frac{1}{4}$ de $\frac{8}{3}$, je les réduis premierement à ces deux fractions ou raiſons qui ont un même dénominateur ou conſéquent $\frac{12}{48}\ \frac{32}{48}$, après je retranche le numerateur 12 du numerateur 32, le reſte ſera $\frac{20}{48}$.

S'il faut retrancher une fraction d'un entier, ou un entier d'une fraction; il faut réduire l'entier à une fraction qui ait le même dénominateur que la fraction donnée, *ſup.* n. 13. Pour retrancher $\frac{1}{4}$ de 8, je réduis cet entier 8 à cette fraction $\frac{32}{4}$ d'où ayant ôté la fraction propoſée $\frac{1}{4}$, il reſte $\frac{31}{4}$. Ainſi pour retrancher la fraction $\frac{aa}{c}$ de la fraction $\frac{bb}{c}$, j'écris $\frac{bb-aa}{c}$.

Dixieme Proposition.

Problême dixieme.

Multiplier une fraction ou raiſon par une autre 30
fraction ou raiſon.

Soient données ces deux fractions ou raiſons $\frac{4}{7}$ & $\frac{2}{3}$, je les réduis à ces deux fractions ou raiſons qui ont un même dénominateur

ou conséquent $\frac{12\ 10}{15}$. Je multiplie ensuite les numérateurs l'un par l'autre, le produit 120 sera le numérateur de la fraction $\frac{12}{17}$, multipliée par la fraction $\frac{10}{17}$, sous lequel numérateur 120 on met ordinairement le produit du dénominateur commun 15 multiplié par lui-même, lequel produit est ici 225; de sorte que le produit des deux fractions données est $\frac{120}{225}$.

Pour abréger cette opération, sans faire aucune réduction, il faut prendre pour numérateur de la fraction que l'on cherche, le produit des numérateurs des fractions données, & pour dénominateur le produit des dénominateurs; ainsi les fractions données étant $\frac{4}{7}$ & $\frac{2}{3}$, leur produit sera $\frac{8}{17}$. Il est facile de démontrer que cette opération est bonne

Il ne faut que démontrer que la raison $\frac{8}{17}$ est égale à celle-ci $\frac{120}{225}$. Ce qui est clair, car elles sont composées de raisons égales, puisque la raison de $\frac{8}{17}$ est composée de celles ci $\frac{4}{7}$ & $\frac{2}{3}$, comme cette fraction $\frac{120}{225}$ est composée des fractions $\frac{12}{17}$ & $\frac{10}{17}$, qui sont les mêmes. Les raisons composées sont égales, lors que les raisons composantes sont égales.

Ainsi pour multiplier $\frac{b}{c}$ par $\frac{m}{n}$, il faut écrire $\frac{bm}{cn}$.

Onzieme Proposition.

Problême onzième.

31 *Diviser une fraction par une fraction.*

Dans toute division on cherche la maniere dont le diviseur est contenu dans la grandeur à di-

à diviſer, ou la raiſon du diviſeur à la grandeur à diviſer : car comme nous avons vu, l'expoſant de la raiſon de ces deux grandeurs eſt le quotient de la diviſion de l'une par l'autre. Ainſi quand on propoſe de diviſer une fraction par une autre fraction, on demande quelle eſt la raiſon de l'une à l'autre, & quel eſt l'expoſant de cette raiſon.

Lors que deux fractions ou raiſons ont le même dénominateur ou même conſéquent, il eſt évident qu'elles ſont entre elles comme leurs numerateurs. Par exemple, il eſt clair que $\frac{2}{4}$ eſt à $\frac{3}{4}$ comme 2 eſt à 3 ; ainſi dans ce cas il faut ſeulement placer le numerateur de l'une ſur le numerateur de l'autre; cette fraction $\frac{2}{3}$ eſt l'expoſant de ces deux fractions $\frac{2}{4}$ & $\frac{3}{4}$.

Si les deux fractions propoſées ont differens noms, il faut les multiplier en croix, le numerateur de l'une par le dénominateur de l'autre, & le numerateur de celle-ci par le dénominateur de la premiere, puis diviſant le produit fait du numerateur de la fraction à diviſer, & du dénominateur de l'autre fraction par l'autre produit, on aura le quotient de la diviſion des fractions propoſées. Soient données ces deux fractions $\frac{b}{d}$ & $\frac{f}{g}$. Je multiplie b par g & f par d, & je diviſe comme il a été dit, le produit de b par g, par le produit de d par f, ce qui me donne $\frac{bg}{df}$, expoſant de la raiſon des deux fractions propoſées, ce que je démontre ainſi.

En multipliant b par g & f par d, j'aurai ces deux produits df & bg, ſous leſquels ayant

placé le produit de d par g, les deux fractions proposées seront réduites à celles-ci qui ont le même nom $\frac{bg}{dg}$ & $\frac{df}{dg}$ dont l'exposant est $\frac{bg}{df}$, selon ce que nous venons de dire, que lorsque deux fractions ont le même nom, elles sont entre elles comme leurs numerateurs. Or c'est ce qu'il falloit démontrer, savoir que $\frac{bg}{df}$ étoit l'exposant des deux fractions $\frac{b}{d}$ & $\frac{f}{g}$.

Selon cette méthode, pour diviser $\frac{3}{5}$ par $\frac{2}{6}$ & pour trouver l'exposant de la raison de ces deux fractions, je multiplie 3 par 6, ce qui fait 18, que je place sur une ligne, sous laquelle je mets le produit de 2 par 5, ce qui me donne $\frac{18}{10}$, qui est l'exposant de la raison de $\frac{3}{5}$ à $\frac{2}{6}$.

Lors que le numerateur se peut diviser par le numerateur, & le dénominateur par le dénominateur, la chose est aisée. Ainsi ayant à diviser $\frac{6}{20}$ par $\frac{2}{5}$, les quotiens sont $\frac{3}{4}$, ce qui abrege, & sur-tout pour les grandeurs literales, comme $\frac{acd}{bg}$ par $\frac{d}{g}$ vient $\frac{ac}{b}$. La raison est que la division défait ce que la multiplication a fait.

Il n'est pas nécessaire d'avertir ici que les opérations Arithmetiques sur les fractions, se prouvent de la même maniere que celles qu'on fait sur les entiers: Savoir, l'Addition par la Soustraction & réciproquement, comme aussi la Multiplication par la Division, &

& réciproquement; cela s'entend assez de soi-même.

CHAPITRE II.

Des autres Opérations Arithmetiques sur les Fractions.

Problêmes curieux.

LEs autres Opérations de l'Arithmetique se font sur les fractions comme sur les grandeurs absolues; ainsi il n'est pas nécessaire d'en parler. Ces Opérations ne consistent que dans certaines manieres d'additions, de soustractions, de multiplications, de divisions: c'est pourquoi lors que l'on fait ajouter ou soustraire, multiplier ou diviser des nombres rompus, on fait les Règles de trois, de Compagnie, & les autres Règles sur ces nombres.

Les extractions des racines se font aussi de la même maniere sur les nombres rompus que sur les nombres entiers. Par exemple, pour tirer la racine quarrée de cette fraction $\frac{9}{25}$, je tire celle du numerateur 9 qui est 3, celle du dénominateur 25 qui est 5, ce qui me donne cette fraction $\frac{3}{5}$, racine quarrée de $\frac{9}{25}$.

Ainsi $\frac{a}{b}$ est la racine quarrée de $\frac{aa}{bb}$. La racine cubique de $\frac{8}{27}$ est $\frac{2}{3}$; car celle de 8 est 2, & celle de 27 est 3. La racine cubique de $\frac{a^3}{b^3}$ est $\frac{a}{b}$.

Je propoſerai ici quelques queſtions, où l'on verra l'uſage des fractions, & la pratique de ce qu'on a enſeigné. Remarquez dans ces queſtions une choſe de la derniere importance, que la réſolution d'une queſtion dépend ſouvent de la ſeule maniere d'en exprimer les termes. Un nombre entier ſe rompt en tant de parties qu'on veut. Il faut choiſir une fraction propre à réſoudre la queſtion, comme vous l'allez voir.

QUESTION PREMIERE.

32 *Le baſſin d'une fontaine a trois ouvertures; par la premiere l'eau s'écoule toute en trois heures, par la ſeconde en 5, & par la troiſieme en 6. On demande en combien de temps tout le baſſin plein d'eau s'écouleroit, ſi on ouvroit en même tems toutes ſes ouvertures.*

Selon que la queſtion eſt propoſée; toute l'eau s'écoulant en 3 heures par la premiere ouverture, il s'en écoulera $\frac{1}{3}$ par la même ouverture dans une heure, pareillement il s'en écoulera $\frac{1}{5}$ dans une heure par la ſeconde ouverture, & $\frac{1}{6}$ par la troiſieme ouverture, & par toutes trois enſemble il s'en écoulera $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ dans l'eſpace d'une heure. Toutes ces fractions ajoutées enſemble ſelon les règles de l'addition font $\frac{53}{90}$, laquelle fraction ſe réduit à celle-ci $\frac{7}{10}$, ſelon qu'il a été enſeigné *ſup.* n. 24. Après quoi on peut raiſonner ainſi: Si $\frac{7}{10}$, c'eſt-à-dire 7 parties de l'eau telles que 10 en vaut dix, ou bien ſi ſept dixiemes de toute l'eau s'écoulent dans une heure, dans combien de tems s'écouleront $\frac{10}{10}$ de cette eau? c'eſt-à-dire toute l'eau,

ſelon

selon ce qui a été dit dans le 1. & 2. Axiome *sup.* n. 6. & 7. J'apperçois que ces termes $\frac{7}{10}$, 1 heure, & $\frac{10}{10}$ sont les trois premiers termes d'une proportion Géometrique, dont le tems qu'il faut pour écouler toute l'eau fait le quatrieme terme.

$$\frac{7}{10}. \quad 1 \quad :: \quad \frac{10}{10}$$

En multipliant le troisieme terme de cette proportion par le second, c'est-à-dire $\frac{10}{10}$ par 1, ce qui fait $\frac{10}{10}$ *sup.* n. 30. car l'entier 1 réduit en fraction s'exprime ainsi $\frac{1}{1}$ *sup.* n. 14. & divisant ce produit par le premier terme $\frac{7}{10}$, le quotient est $\frac{10}{7}$, qui étant réduit au moindre terme *sup.* n. 24. on a le petit quotient $\frac{1}{7}$, dont la valeur est égale à celle du grand $\frac{10}{7}$. Or la fraction $\frac{1}{7}$ est un entier plus $\frac{3}{7}$, selon ce qui a été remarqué, 2. Axiome *sup.* n. 7. Donc $\frac{1}{7} = 1 + \frac{3}{7}$, & ainsi $1\frac{3}{7}$ sera le quatrieme terme de la proportion. $\frac{7}{10}$. 1 :: $\frac{10}{10}$ $1\frac{3}{7}$. C'est-à-dire, que toute l'eau s'écoulera par ces trois ouvertures dans une heure plus trois septiemes parties d'une heure. Si l'on veut avoir ce tems avec plus de précision, il faut évaluer la fraction $\frac{3}{7}$ comme on l'a enseigné *sup.* n. 26.

QUESTION SECONDE.

La moitié d'une pique & un tiers sont dans l'eau, & deux pieds de cette pique sont hors de l'eau; quelle est la longueur de toute la pique? 34

Je nomme *x* cette longueur. Ainsi $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$+ 2 = x$. Je réduis selon la règle *sup.* n. 19, ces deux fractions à un même nom; à celles-ci $\frac{1}{6}$ & $\frac{2}{6}$ que j'ajoute l'une avec l'autre, *sup.* n. 28. ce qui fait $\frac{3}{6}$, ainsi $\frac{3}{6} + 2 = x$. Or $\frac{3}{6} + \frac{1}{6} = x$; car le dénominateur 6 est la valeur de tout x, ainsi $\frac{6}{6} = x$, donc $\frac{1}{6} = 2$; donc la grandeur entiere x est un nombre dont 2 est la sixieme partie; partant c'est le produit de 2 multiplié par 6, c'est-à-dire 12: cette pique est donc de 12 pieds.

Question Troisieme.

35 *Achille va dix fois plus vîte qu'une Tortue, cette Tortue a une lieue d'avance. On demande quand Achille pourra l'attraper.*

Achille attrapera cette Tortue à la premiere neuvieme de la seconde lieue; car pendant qu'elle aura fait $\frac{1}{9}$ de cette seconde lieue, Achille doit avoir fait $\frac{10}{9}$, c'est-à-dire dix fois plus de chemin. Or $\frac{10}{9}$, valent une lieue entiere plus $\frac{1}{9}$ de lieue.

Ces espaces que parcourt la Tortue font cette progression Géometrique $\div$ 1. $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{100}$ $\frac{1}{1000}$, &c. Laquelle progression va toujours en diminuant. Ainsi, comme on l'a remarqué Liv. III. n. 93. toutes ces dixiemes de dixiemes à l'infini ne font qu'une neuvieme de lieue.

Question Quatrieme.

36 *Une horloge a deux aiguilles, l'une des heures qui fait son tour en 12 heures, & l'autre des minutes*

nutes qui fait le même tour en une heure. On demande que l'on marque tous les points auxquels ces deux aiguilles ſe rencontrent.

Après chaque tour, l'aiguille des minutes ſe trouve ſur 12 heures. Ainſi après le premier tour l'aiguille des heures a l'intervalle d'une heure d'avance par deſſus celle des minutes, qui l'attrapera après la $\frac{1}{11}$ de deux heures; car dans le tems que l'aiguille des heures a fait $\frac{1}{11}$ d'une heure, l'aiguille des minutes qui va douze fois plus vîte, doit avoir fait douze onziemes $\frac{12}{11}$, c'eſt-à-dire l'intervalle d'une heure entiere plus $\frac{1}{11}$ de cet intervalle. Après le ſecond tour, l'aiguille des heures aura d'avance, l'intervalle de 2 heures; elle ne peut donc être attrapée qu'à la $\frac{2}{11}$ de l'intervalle qui eſt entre deux & trois heures; car pour-lors l'aiguille des minutes allant toujours douze fois plus vîte, aura fait $\frac{24}{11}$ qui valent l'intervalle de deux heures plus $\frac{2}{11}$. Ainſi de ſuite ces aiguilles ſe rencontreront à ces heures ici: I $+\frac{1}{11}$. II $+\frac{2}{11}$. III $+\frac{3}{11}$. IV $+\frac{4}{11}$. V. $+\frac{5}{11}$. VI $+\frac{6}{11}$. VII $+\frac{7}{11}$. VIII $+\frac{8}{11}$. IX $+\frac{9}{11}$. X $+\frac{10}{11}$. Enfin les deux aiguilles ſe rencontreront à XI $+\frac{11}{11}$, c'eſt-à-dire à douze heures.

On peut ſe ſervir de cette méthode pour déterminer les conjonctions des Planetes lors qu'on ſait leur periode, ou le nombre des années dans lequel elles font leur cours. On peut aſſigner les points du Ciel où les Planetes doivent ſe rencontrer.

QUES-

Question Cinquieme.

37 *Le mauvais Riche brûlé de soif, pria Abraham de lui laisser distiller une goutte d'eau. Supposé que cette goutte eût fait la premiere minute* 100 *lieues, la seconde* 99, *toujours selon cette même raison de* 100 *à* 99: *Et qu'il y eût une distance infinie entre le mauvais Riche & Abraham, on demande, en combien de tems cette goutte aura pu arriver jusques au mauvais Riche.*

Le mouvement de cette goutte d'eau en descendant est retardé; car dans la premiere minute devant faire 100 lieues, & dans la seconde n'en faisant que 99, son mouvement diminue selon cette même raison. Ainsi les espaces qu'elle parcourt font une progression sous-multiple, dont le premier terme est 100, le second 99. On trouvera le troisieme terme selon ce qui a été enseigné, multipliant le second terme 99 par lui-même, divisant son produit par le premier qui est 100, & le quotient $98\frac{1}{100}$ sera ce troisieme terme qu'on cherche. On trouvera ainsi tous les autres termes, qui iront en diminuant, cette progression étant sous-multiple. Le dernier terme n'étant donc pas une grandeur sensible, on le peut supposer égal à zero.

Ainsi $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 100. 99. $98\frac{1}{100}$ . . . . . 0.

Et changeant cette progression sous-multiple en une multiple,

On a $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 0 . . . . . $98\frac{1}{100}$. 99. 100.

Soit donc f la somme de tous les termes qui précédent le dernier 100. Donc par le Corollaire Liv. III. n. 91. 100 — 99. 99 :: 100 — 0. f: Or 100 — 99, n'est que 1, & 100 — 0 c'est

c'eſt toujours 100; ainſi la proportion ſe réduit à 1. 99 :: 100. *ſ.* c'eſt-à-dire 1 eſt à 99 comme 100 eſt à la ſomme de tous les termes qui le précédent. Pour connoitre cette ſomme je multiplie (ſelon qu'il a été dit Liv. III. n. 78.) le troiſieme terme 100, par 99 le ſecond, & j'en diviſe le produit par le premier terme 1; le quotient 9900 de cette diviſion eſt le quatrieme terme valeur de *ſ*; en cette maniere 1. 99 :: 100. 9900. Ainſi donc 9900 eſt la ſomme de tous les termes qui précédent ce dernier terme 100, lequel étant ajouté à 9900, on a 10000, ſomme de toute la progreſſion. Donc je conclus que cette goutte d'eau faiſant la premiere minute 100 lieues, la ſeconde 99, & ainſi de ſuite juſques à zero, ne fera dans toute l'éternité que 10000 lieues, & par conſéquent ne pourra jamais arriver juſques au lieu du mauvais Riche, puiſqu'on ſuppoſe qu'entre lui & Abraham il y avoit un eſpace infini.

SEC-

SECTION TROISIEME.

Des differentes eſpeces de Nombres rompus.

CHAPITRE PREMIER.

Des Fractions Décimales.

38 LEs Fractions peuvent prendre leur nom de la maniere que la grandeur entiere eſt diviſée. On nomme par exemple Fractions Décimales, celles où l'entier eſt diviſé en dix parties, & chacune de ces dix parties en dix autres, & ces dixiemes de dixiemes en autres dixiemes à l'infini; leurs dénominateurs ſont une progreſſion Géometrique ſous-multiple, dans laquelle regne la raiſon ſous-décuple, comme vous le voyez.

$$\therefore \frac{1}{10} \frac{1}{100} \frac{1}{1000} \frac{1}{10000} \frac{1}{100000} \text{ \&c.}$$

Joignons à cette progreſſion Géometrique, la progreſſion des nombres naturels, de ſorte que le premier terme de l'une réponde au premier terme de l'autre, ainſi de ſuite.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
∴	1	2	3	4	5	6	7
∴	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*

10. 100. 1000. 10000. 100000. 1000000. 10000000.

Multipliant par exemple le 3e terme *c* de la progreſſion Géometrique par le 4e *d*, ce qui fait 10000000. Pour ſavoir quel terme c'eſt que

que ce produit dans la progression Géometrique, j'ajoute *C* & *D*, l'un à l'autre de la progression Arithmetique, ce qui me donne 7 pour 7e terme; ainsi je connois que le produit 10000000 est le septieme terme. Dans la progression Arithmetique on fait par addition, ce qu'on fait dans la Géometrique par la multiplication.

On joint toujours la progression Arithmetique à cette progression des Fractions décimales; mais au-lieu des chiffres de la progression des nombres naturels, on met des lignes de cette maniere. 39

$10'$. $100''$. $1000'''$. $10000''''$. $100000'''''$. 1000000^{VI}. 10000000^{VII}.

Ce qui fait qu'on leur donne les noms du nombre de ces petites lignes, ou de la valeur des termes de la progression Arithmetique, à laquelle ces fractions répondent. On les nomme donc *Primes*, *Secondes*, *Tierces*, *Quatriemes*, *Cinquiemes*, *Sixiemes*, *Septiemes*; ainsi de suite à l'infini, & selon ce qu'on a dit; multipliant des primes par des secondes $10'$ par $100''$; ce qui fait 1000: pour savoir ce que c'est que ce produit, j'ajoute les lignes de dessus les unes avec les autres' avec'' & cela fait''' ; ce qui me fait connoitre que le produit des primes multipliées par des secondes sont des tierces. Qu'ainsi des tierces multipliées par des quatriemes font des septiemes, puisque 3 & 4 font 7. De même une prime par une prime $1'$ par $1'$, cela doit faire $1''$, & $1''$ par $1''$ doit faire $1'''$. cela est évident; car une prime c'est $\frac{1}{10}$: multipliant $\frac{1}{10}$ par $\frac{1}{10}$, cela fait $\frac{1}{100}$. *sup.* n. 30; Ainsi une

une prime multipliée par une prime doit valoir une seconde ; car $\frac{1}{100}$ c'est une seconde. Le produit est donc toujours de l'espece que donne l'addition des petites lignes. Ainsi encore une fois, des tierces par des tierces donnent des sixiemes, les secondes par des quatriemes, "par ''', donnent des sixiemes.

40 L'utilité des Fractions décimales est très-grande ; parce que les opérations qu'on fait par leur moyen sont courtes. Pour réduire des entiers en primes, des primes en secondes, ou des secondes en des primes, & des primes en entiers, il n'est question que de multiplier ou diviser. Pour réduire des entiers en des primes, il faut les multiplier par 10 ; pour les réduire en des secondes, il faut les multiplier par 100, puisqu'un entier vaut 10 primes, ou 100 secondes. Or pour faire cette réduction, il faut seulement joindre les plus petits aux plus grands. L'on a 5 entiers 3′ & 6″, on veut réduire ces 5 entiers & ces 3 primes en des secondes, j'écris 536″ ; car pour faire cette réduction il faut multiplier 5 par 100, c'est-à-dire le faire valoir 100 fois davantage, en le faisant passer dans le rang des centaines ; ce que j'ai fait en plaçant deux chiffres devant lui ; pour réduire 3′ en secondes, il faut multiplier 3 par 10, ou le faire valoir 10 fois davantage, ce que je fais en plaçant un chiffre devant lui.

Au contraire, pour réduire de petites mesures en de plus grandes, il faut les diviser par le nombre de leurs parties qui est nécessaire pour faire la grandeur dont elles sont parties. Pour réduire par exemple un nombre de primes en entiers, il faut le diviser par

10,

10, ou ce qui est la même chose, faire que ce nombre vaille 10 fois moins, ce qui se fait en retranchant un chiffre. Par exemple, pour réduire 53′ en des entiers, je sépare 3 de 5, alors 5 ne vaudra pas cinq dixaines, mais cinq unitez qui feront cinq entiers. Ainsi si l'on propose de savoir combien 6782″ font de secondes, je retranche un chiffre, & j'apperçois que cela fait 678″ plus 2″; si l'on demande combien c'est de primes, je retranche deux chiffres, & je vois que cela fait 67′ plus 82″, ou 8″ plus 2‴; si enfin l'on me demande combien ce sont d'entiers, je retranche 3 chiffres, & j'apperçois que 6782‴ font 6 entiers plus 782‴, ou 7′ + 8″ + 2‴.

L'Addition & la Soustraction des Fractions décimales se font à l'ordinaire. On met les fractions de même nom les unes sous les autres; les primes sous les primes, les secondes sous les secondes, les tierces sous les tierces, &c. Et on opere à l'ordinaire. Il suffit de jetter les yeux sur ces exemples. 41

ADDITION. *Ajouter* { 5′ 6″ 3‴. / 0′ 7″ 2‴.

somme 6′ 3″ 5‴.

SOUSTRACTION. *de* 6. 4′ 5″ 0‴ 7‴ 5‴‴.

ôter 3. 6′ 0″ 8‴ 2‴ 3‴‴.

reste. 2 8′ 4″ 2‴ 5‴ 2‴‴.

Vous pourrez remarquer qu'on emprunte du terme précédent, quand celui qu'on veut ôter est plus grand que celui sous lequel il est.

La multiplication & la division se font aussi facilement avec ces fractions décimales; on multiplie les chiffres à l'ordinaire, les uns 42

par

par les autres, & on ajoute dans une ſomme leurs petites barres; comme on l'a vu, *ſup.* n. 39. Ainſi pour multiplier 5 entiers 6′ 3″ 4‴ par 8 entiers 2′ 4″, 6‴, je réduis ces deux ſommes au même nom, écrivant ſimplement 5634‴ & 8246‴: Après quoi je multiplie 5634‴ par 8246‴ dont le produit eſt 46457964ᵛⁱ ſur lequel je mets ᵛⁱ, qui eſt fait de l'addition de‴ & de‴ ou de 3 & de 3. Ainſi ce produit ſont des ſixiemes.

La diviſion ſe fait en la même maniere. On diviſe les chiffres du dividende par les chiffres du diviſeur; & on ôte les barres du diviſeur du nombre de celles du dividende, on met le reſte ſur le quotient. Ainſi des huitiemes diviſées par des cinquiemes donnent des troiſiemes; car de v‴ ôtant v reſte ‴ ou 3. Si on veut donc diviſer 8′ 6″ 4‴ par 2′. je diviſe 864‴ par 2′, le quotient eſt 432″ ſur lequel je mets ″ ôtant ′ de ‴, dont le reſte eſt ″. Pour diviſer 3 entiers 4′. 4″ 3‴ 5ᵛ 2ᵛⁱ par 9′ 6″. il faut diviſer 344352ᵛⁱ par 96″, le quotient ſera 3587‴ ſur lequel je mets trois petites lignes; car de ᵛ ôtez ″ reſte ‴.

43 Les diviſions & ſubdiviſions décimales ſont commodes, comme vous le voyez, parce que les operations de l'Arithmetique en ſont faciles. Ainſi autant qu'on le peut il y faut rappeller les autres ſubdiviſions. Pour cela les toiſes dont ſe ſervent nos Ouvriers, étant diviſées d'un côté en ſix parties ou ſix pieds, chaque pied en douze pouces, & chaque pouce en douze lignes; il faut de l'autre côté marquer une diviſion de la toiſe entiere en dix parties, & de chaque dixieme en d'autres dixiemes à l'infini. Ainſi en meſurant avec cette

cette toise, on peut ne parler ni de pieds ni de pouces, ni de lignes; & au bout du calcul, évaluer les parties décimales, ce qui est aisé. Car pour savoir en pieds, en pouces & en lignes ce que valent 8'. 9", on raisonne ainsi: Si 10 primes ou cent secondes valent une toise ou six pieds, combien 8' 9" ou 89" vaudront-elles? ce que je trouve par la Règle de trois, multipliant 89 par 6, & divisant le produit 534 par 100; le quotient $5\frac{34}{100}$ fera connoitre que 8' 9" valent 5 pieds quelque chose de plus. J'évalue cette fraction qui vaut 34 parties d'un pied divisé en 100, disant: Si 100 donne 34, combien donneront douze pouces qui valent un pied entier, & partant ces 100 parties? Je multiplie 34 par 12, & j'en divise le produit 408 par 100; le quotient $4\frac{8}{100}$ marquera que cette fraction $\frac{34}{100}$ d'un pied vaut 4 pouces plus $\frac{8}{100}$ de pouce, ce qu'on pourra de même évaluer en lignes.

Si on vouloit savoir combien cinq pieds trois pouces valent de primes & de secondes, on le trouveroit de la même maniere raisonnant ainsi: Si six pieds valent une toise, & par conséquent dix primes, ou, ce qui est la même chose, si trois pieds valent cinq primes, combien cinq pieds vaudront-ils de primes?

CHA-

CHAPITRE II.

De la réduction des Meſures & des Monnoyes.

144. LEs grandes meſures ſe diviſent ordinairement en de plus petites meſures. On peut nommer les nombres qui expriment les grandes meſures, des nombres entiers; & nombres rompus, ceux qui n'expriment que les petites. Nous avons enſeigné ci-deſſus les moyens de réduire toutes ces differentes meſures, & de donner aux plus grandes & aux plus petites le même nom, lors qu'il eſt néceſſaire de faire ſur elles les opérations ordinaires de l'Arithmetique; mais ſans cette réduction ces opérations ſe font aiſément en rangeant ces differentes meſures ſous differentes colomnes, à qui on donne le nom de ces meſures; ainſi qu'on a vu que les chiffres ont differentes valeurs, ſelon le rang ou colomne dans leſquels ils ſont placez. Les poids, les monnoyes ſont des meſures qui ſe ſubdiviſent. Les toiſes, par exemple, ſe ſubdiviſent en pieds, les pieds en pouces, les pouces en lignes. Il y a de grandes & de petites monnoyes. Il ſuffira pour faire concevoir tout ce qu'il eſt néceſſaire de ſavoir touchant les opérations ſur ces ſubdiviſions, de voir comme on peut faire une addition de differentes eſpeces de monnoyes. Si on avoit donc une addition à faire de pluſieurs piſtoles, livres, ſols, deniers; il faudroit ranger toutes ces differentes monnoyes ſous differentes colomnes, comme vous le voyez dans l'exemple ſuivant,

&

& pratiquer la même chose que ce qu'on a fait sur les nombres ordinaires.

Une pistole vaut 10 livres. Une livre vaut 20 sols. Un sol vaut 12 deniers. Ayant differentes sommes composées de pistoles, de livres, de sols, de deniers, pour les ajouter dans une seule somme, il faut écrire chaque monnoye sous celle de même nom, mettant les deniers dans le premier rang de droit à gauche, après dans le second rang les sols, dans le troisieme les livres, dans le quatrieme les pistoles, de cette maniere.

5 pistoles.	*6 livres.*	*8 sols.*	*4 deniers.*
7	8	9	10
11	9	17	8
25	8	10	7
51	3	6	5

Je commence cette addition par le premier rang, dans lequel je trouve 29 deniers, qui font 2 sols & 5 deniers; je marque 5 sous ce rang; & je retiens 2 sols pour le rang suivant, lesquels avec ceux qui y sont font 46 sols, qui valent 2 livres plus 6 sols. Je marque 6 sols sous ce rang, & je tiens 2 livres. Dans le troisieme rang je trouve 31 livres, qui avec les deux livres que j'avois retenues en font 33, qui valent 3 pistoles plus trois livres. Je ne marque donc que 3 sous ce rang, & je reserve 3 pistoles, qui avec les 48 qui s'y trouvent font 51 pistoles; ainsi la somme de toutes ces sommes particulieres est 51 pistoles 3 livres 6 sols 5 deniers.

La soustraction se fait de la même maniere; il faut écrire les monnoyes de même nom dans une même colomne, la plus petite som-

me ſous la plus grande, & commençant par la premiere colomne de la droite à la gauche, il faut retrancher le plus petit du plus grand, & ce qui reſte le placer dans le rang qui lui convient. Si dans les premieres colomnes il ſe trouve que ce qui eſt deſſous eſt plus grand que ce qui eſt deſſus, il faut emprunter de la colomne ſuivante. Ainſi voulant ôter trois piſtoles ſix livres dix-huit ſols dix deniers, de cinq piſtoles huit livres quinze ſols ſix deniers, après avoir

5 piſtoles.	*8 livres.*	*15 ſols.*	*6 deniers.*
3	6	18	10
2.	1.	16.	8.

écrit ces deux ſommes, je dis, on ne peut pas ôter dix deniers de ſix; j'emprunte un ſol de la colomne ſuivante, qui avec 6 fait 18 deniers, d'où je retranche 10 deniers, & le reſte eſt 8. De 14 ſols qui reſtent je ne puis ôter 18 ſols: j'emprunte une livre qui avec ces 14 fait 34 ſols, d'où ayant ôté 18, reſte 16 ſols. De 7 livres retranchant 6 livres, reſte 1. De 5 piſtoles ôtez en 3, reſte 2. Ainſi après la ſouſtraction reſte 2 piſtoles, une livre, 16 ſols huit deniers.

Ces deux exemples ſuffiſent pour comprendre comment ſe doivent faire l'addition & la ſouſtraction de pluſieurs eſpeces differentes, ſoit de monnoye ſoit de meſures; comme auſſi ſur les parties qu'on nomme Aliquotes, c'eſt-à-dire qui ſe trouvent exactement un certain nombre de fois dans une grandeur. On voit, par exemple, ce qu'on doit faire s'il étoit queſtion de faire une addition de tiers, de quarts, de cinquiemes, ou une ſouſtraction; il faut en faire des colomnes, dont la derniere

niere est celle des entiers; ainsi comme trois tiers font un entier, leur addition se doit mettre dans la colomne des entiers. Dans le calcul Astronomique l'on compte par degrez, minutes, secondes. Un degré a soixante minutes; une minute soixante secondes, une seconde soixante tierces, ainsi de suite. Lorsqu'il s'agit de faire une addition de ces parties, il faut les ranger dans des colomnes, chacune dans celle de son nom; & ensuite opérer, comme on a fait sur les monnoyes.

Pour les autres opérations d'Arithmetique, il faut nécessairement réduire les differentes especes de mesures qu'on veut multiplier les unes par les autres, comme on l'a vu *sup.* n. 26. Cette réduction se fait par la multiplication. Quand après cela on veut savoir quelles especes contient le produit de cette multiplication, si ce sont des mesures, combien ce produit contient par exemple de toises, de pieds, de pouces, de lignes, on divise ce produit par les nombres qui marquent les raisons que ces parties ont entre elles. On donne ces règles pour les réductions des monnoyes, dont il est facile de découvrir le fondement en faisant ces opérations selon les règles ordinaires. Pour réduire les livres en sols, il faut ajouter un zero & doubler la somme. Pour réduire 40 livres en sols je double cette somme, ce qui fait 80, & j'ajoute un zero. Quarante livres valent 800 sols; & pour réduire les sols en livres, il faut retrancher le dernier chiffre de droit à gauche, & prendre la moitié du reste, & ce qui reste sont des livres. Pour réduire 857

ſols en livres, je retranche le dernier chiffre 7, & je prens la moitié de 85 ou de 84, ce qui me fait connoitre que 857 ſols valent 42 livres 17 ſols. Pour réduire les ſols en deniers, il faut multiplier les ſols par 4 & par 3, ou quadrupler & tripler la ſomme.. Ainſi pour réduire 42 ſols en deniers, je multiplie 42 par 4, ce qui fait 168; & 168 par 3, ce qui fait 504: c'eſt le nombre de deniers que valent 42 ſols. Pour réduire les deniers en ſols, il faut prendre le tiers & le quart. Ainſi le tiers de 504 qui eſt 168, & le quart de ce tiers qui eſt 42, eſt le nombre de ſols que valent 504 deniers. En faiſant ces réductions tout au long, on voit le fondement de ces règles.

CHAPITRE III.

De l'aproximation des Racines des puiſſances imparfaites, ou de l'expreſſion (à peu près) *en nombres rompus, de ce qu'on ne peut pas exprimer avec des nombres entiers.*

45 JE prouverai dans le Livre ſuivant, qu'on ne peut exprimer par aucun nombre, ſoit entier ſoit rompu, la racine d'une puiſſance imparfaite; que par exemple, ce nombre 18 qui n'eſt pas un nombre quarré, ne peut avoir une racine qui ſe puiſſe exprimer avec quelque nombre, même rompu. Or ce qu'on ne peut pas exactement, ſe peut faire à peu près. Pour cela il faut rompre l'entier & le réduire en fraction. Si par exemple ce nombre 18 eſt pro-

proposé pour en extraire la racine qui soit à peu près celle de 18, qui est un nombre de pieds; il faut réduire ces pieds en pouces. Chaque pied vaut en longueur 12 pouces, mais un pied quarré vaut 144 pouces, il faut donc multiplier 18 par 144, le produit est 2592, auquel un quarré de 18 pieds est égal. Ensuite il faut prendre la racine quarrée de ce produit; mais on n'en trouvera pas d'exacte: pour en approcher de plus près, il faut réduire l'entier 18 en fractions décimales; lesquelles peuvent être continuées à l'infini. Enfin on peut trouver une fraction qui multipliée par elle-même fasse ce nombre 18 avec si peu de difference que cela ne soit pas sensible. J'ajoute à 18 deux zero, cela fait 1800 primes quarrées, qui ne valent que 18 entiers quarrez. Ayant partagé ce nombre par tranches

$$\begin{array}{r|l} 2 & \\ 18 & 00 \\ & 82 \end{array} \Big\} 4$$

& pris la racine du quarré de la derniere tranche qui est 16, dont la racine est 4, il faut doubler cette racine trouvée, comme il a été enseigné: le double de 4 est 8, par lequel je divise 20; le quotient est 2, qui sera le second chiffre de la racine du nombre donné, & que j'écris après le diviseur 8. Ensuite ayant multiplié 82 par 2, ce qui fait 164, & ôté ce produit de 200, reste 36.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 36 \\ & 00 \\ & 82 \end{array} \Big\} 42'$$

Ainsi je sai que 42 primes, ou 4 entiers plus 2 primes, sont la racine de 18: mais cette racine

n'eſt pas juſte, puiſqu'il s'en faut 36 primes qu'elle ne faſſe 18 entiers.

Pour avoir encore une racine plus exacte, il faut réduire ce reſte en des ſecondes quarrées, en plaçant devant le reſte 36 deux zero.

$$\begin{array}{r|l} 36 & 00 \\ 8 & 44 \end{array} \left\{ 424''$$

Enſuite il faut doubler les racines trouvées 42, ce qui fait 84, & diviſer 3600 par ce double, le quotient de cette diviſion eſt 4 qui eſt le troiſieme caractere de la racine cherchée, que je marque après les deux premieres que j'ai déja trouvées; je multiplie 844 par ce dernier caractere 4, ce qui fait 3376, que j'ôte de 3600, & reſte 224; ainſi cette racine 424'' n'eſt pas encore la juſte racine de 18, car il s'en faut 224 ſecondes qu'elle ne faſſe 18; c'eſt pourquoi ſi on en veut trouver une plus exacte, il faut continuer cette opération, ſans eſperance, comme nous le ferons voir dans le Livre ſuivant, qu'on puiſſe trouver une racine entierement préciſe d'un nombre non quarré qui a été propoſé, & de tout autre nombre qui n'eſt pas quarré: mais vous voyez que le moyen que nous avons donné eſt exact, puiſqu'on connoit de combien on eſt éloigné du terme où l'on prétend aller.

Ce qui eſt merveilleux, c'eſt qu'on peut augmenter juſqu'à l'infini ce nombre 4, qui eſt la racine du quarré 16, qui eſt le nombre quarré qui approche le plus de 18, ſans que cette addition augmente cette racine 4 d'un nombre entier; ce que nous démontrerons ainſi.

9 primes, 9 ſecondes, 9 tierces, & tous les autres nombres rompus de ſuite ajoutez enſem-

semble, quand il y en auroit une infinité, ne peuvent faire une unité d'un nombre entier. Car afin que ce qu'on ajoute à 9 secondes fasse 10 secondes, il faudroit que cette addition valût 10 tierces, puis qu'une seconde vaut 10 tierces; ainsi 9 tierces avec 9 secondes, ne peuvent pas faire 10 secondes. Or afin que ce qu'on ajoute à 9 primes valût 10 primes, & par conséquent un entier, il faudroit que cette addition valût 10 secondes; ce qui n'est pas. On a vu que 9 tierces avec 9 secondes ne peuvent valoir 10 secondes; ainsi $9' 9'' 9'''$. ajoutées ensemble, ne peuvent valoir 10 primes, ni par conséquent un entier. Cette même démonstration prouve que $9' 9'' 9''' 9''''$ ne peuvent faire un entier, & ainsi à l'infini. D'un autre côté $9' 9'' 9'''$ valent bien plus que 9 simples primes: ainsi vous voyez comme l'on peut augmenter ce même nombre 9 primes de plus en plus, sans cependant venir jusqu'à 10 primes; ce qui surprend ceux qui n'ont jamais fait réflexion sur la divisibilité indéfinie de tout ce qui est grand.

On peut en la même maniere extraire la racine cubique des nombres qui ne sont pas cubes, autant que cela se peut faire. Il faut réduire le nombre donné ou en primes, ou en secondes, ou en tierces, selon qu'on veut avoir une racine plus précise. Soit donné ce nombre non cube 30: le cube qui approche le plus de 30 est 27, dont la racine cubique est 3; de 30 ôtant 27, reste 3. Pour avoir une racine plus précise de ce nombre, il faut le réduire en primes: un entier qui est cube vaut 1000 primes; car un entier vaut dix primes: Or 10 multipliez par 10 fait 100, & 100 multipliez

tipliez par 10 fait 1000; donc pour réduire les 30 entiers donnez en primes, il ne faut qu'écrire de suite trois zero; ainsi 30000. Il faut extraire la racine cube de ce nombre 30000 par les règles ordinaires, 1°. le coupant par tranches, comme il a été enseigné.

	20	
3	319	
30	000	(31

2°. Il faut extraire la racine du cube de la derniere tranche : cette racine est 3 dont le cube est 27, que j'ôte de 30, le reste est 3. Selon les règles je prends le quarré de 3 que je viens de trouver, ce quarré est 9 que je triple, le triple est 27 par lequel je divise 30, le quotient est 1, que je marque après la premiere racine trouvée 3. De 30 j'ôte 27, reste 3; je prends le quarré de 1 qui est 1, je le multiplie par 9 triple de 3, dernier chiffre de la racine. Je retranche le produit qui est 9 de 30, il reste 21; j'ôte de 210 le cube de 1 qui est 1, il reste 209. Ainsi je connois que la racine cube de 30 est 31 primes. Mais cette racine n'est pas précise, puis qu'il s'en faut 209 que 31 primes multipliées cubiquement fassent 30 entiers. Pour avoir donc une racine plus exacte, il faut réduire le nombre proposé en des secondes: & puis que les primes cubiques valent 1000 fois davantage que les secondes qui ne sont point figurées, il faut encore ajouter trois zero après les primes qui restoient, savoir après 209, ainsi 209000. Ensuite il faut extraire la racine cube de ce nombre, commençant par le trancher, comme il a été enseigné.

209 | 000 (310

Selon la règle, je prends le quarré de 31, qui eſt 961 que je triple, ce qui fait 2883, par lequel nombre ne pouvant diviſer 2090, j'écris zero après les racines trouvées. Je ſai ainſi que la racine cube de 30 eſt 310 ſecondes: mais cette racine n'eſt point encore exacte; c'eſt pourquoi ſi j'en veux avoir une qui approche encore plus de la véritable racine de 30, je dois réduire ces ſecondes en tierces, & continuer la même operation.

ELEMENS DES MATHEMATIQUES, OU TRAITÉ DE LA GRANDEUR EN GENERAL.

LIVRE SIXIEME.

Des Grandeurs incommenſurables.

SECTION PREMIERE.

Ce que c'eſt que la commenſurabilité & incommenſurabilité des Grandeurs. Des nombres pairs, impairs, premiers, quarrez, cubes, &c.

CHAPITRE PREMIER.

Ce que c'eſt que Grandeur incommenſurable.

1 EN parlant des Raiſons nous avons vu qu'on diſoit qu'une Raiſon étoit *ſourde* lors qu'elle ne ſe pouvoit exprimer avec des nombres, c'eſt-

c'eſt-à-dire lors qu'on ne pouvoit pas marquer exactement combien l'un des termes de cette Raiſon contenoit de fois, ou étoit contenu dans l'autre, par exemple, s'il y étoit ou une fois, ou deux fois, ou trois fois, &c. Les nombres ne ſont proprement que des raiſons. Lors qu'il s'agit de nombrer pluſieurs choſes, l'on en prend ou l'on en conçoit une qui eſt bien connue, qu'on établit pour l'unité ou pour la commune meſure, ainſi qu'on l'a déja remarqué. Enſuite comparant avec cette commune meſure toutes les autres choſes qu'on veut nombrer, ſelon le rapport qu'on trouve qu'elles ont avec elle, on leur donne differens noms: on les appelle deux, trois, quatre, &c. Les nombres ne ſont ainſi que des rapports connus, par exemple, ce nombre 7 eſt le rapport qu'il y a entre deux choſes, dont on ſait que l'une étant repetée tant de fois, meſure préciſément l'autre.

L'unité eſt donc comme la meſure dont on ſe ſert pour meſurer. Ainſi l'on dit que pluſieurs grandeurs ſont commenſurables, ou qu'elles peuvent être meſurées par une même meſure, lorsqu'on peut aſſigner une certaine quantité qui ſe rencontre exactement tant de fois dans chacune. Que ſi cela n'arrive pas, ces grandeurs ſont incommenſurables. Les grandeurs qui n'ont entre elles qu'une raiſon ſourde, ſont donc incommenſurables, puis qu'on ne les peut exprimer par nombres, où qu'il n'y a aucune certaine quantité qui étant priſe pour l'unité les puiſſe meſurer exactement ſans reſte, & qu'il y manque quelque choſe, ou qu'il y a de l'excès.

Il eſt très-important de remarquer ici que les

hommes ne conçoivent jamais clairement une choſe, quand ils n'y ſont point accoutumez, à moins qu'on ne leur faſſe appercevoir qu'elle a un rapport exact avec les choſes qui leur ſont familieres. Or toutes les choſes ne ſont pas commenſurables. Il eſt bon de s'en convaincre, & de bien remarquer qu'on ne doit pas toujours prendre pour règle ce qu'on connoit, parce qu'il ſe peut faire que ce qu'on propoſe eſt d'un autre ordre. Ceux qui veulent tout rapporter au corps, jugent mal de la nature de l'ame; & ceux qui rapportent tout aux choſes créées & finies, comme ſont l'ame & le corps, jugent mal de Dieu, de ce qu'il eſt, & de la Trinité des Perſonnes qui eſt en Dieu, les Eſprits & les Corps n'étant pas commenſurables, ni Dieu avec ſes créatures.

Pour concevoir comment il y a des Grandeurs incommenſurables, conſiderons qu'avec une toiſe, qui eſt une meſure de ſix pieds, on ne peut meſurer exactement une longueur qui a moins de ſix pieds ou qui en a plus, mais qui n'en a pas douze; car alors deux fois la toiſe feroit cette longueur de douze pieds. Si cette longueur a tant de pieds, & outre cela quelque choſe de plus ou de moins qu'un pied, une meſure d'un pied ne pourra pas encore meſurer cette longueur exactement, quoi que le pied le faſſe plus exactement que la toiſe; car ce qui reſte à meſurer eſt plus petit. Si on prend pour meſure un pouce, qui eſt la douzieme partie d'un pied, & que la longueur qu'on veut meſurer ait tant de pouces, mais outre cela quelque choſe de plus ou de moins, vous voyez que le pouce ne ſera pas encore une meſure exacte, & que le pouce & cette longueur ne ſont pas commenſurables. Que ſi

on continue à prendre des mesures toujours plus petites que le pouce, par exemple qu'on prenne la douzieme partie d'un pouce qui est une ligne, & qu'on ne trouve point de mesure exacte quoique l'on pousse la chose à l'infini, alors cette longueur est censée incommensurable avec toutes les grandeurs que nous connoissons. Je dis si cela arrive, car je ne le puis pas démontrer encore, comme je le ferai dans la suite. Or si cela est, il est évident que cela vient de la divisibilité de la grandeur à l'infini; car enfin si les grandeurs avoient des parties indivisibles, ces dernieres parties seroient des mesures communes.

Ces réflexions sur l'incommensurabilité de certaines grandeurs, sont de la derniere importance pour se convaincre de cette vérité, d'un si grand usage dans la Religion, qu'il y a des choses de fait constantes, qui sont incompréhensibles. Nous connoissons plusieurs véritez touchant les grandeurs incommensurables également certaines & cachées, qu'on ne comprend point; ce qui nous apprend que quoique les Mysteres soient incompréhensibles, & qu'on n'en ait point d'idée parfaite, néanmoins on en peut croire & démontrer plusieurs choses. Mais en même tems que cette matiere nous fait connoitre les bornes de l'esprit de l'homme, elle nous en doit faire concevoir la vaste étendue, & sa grande pénétration, qui lui fait découvrir tant de choses dans ce qui de soi-même est tellement caché, qu'on ne peut point connoitre ce qu'il est véritablement.

cine quarrée. Un nombre cubique est fait de la multiplication d'un nombre multiplié deux fois par lui-même, qui se nomme *Racine cube* de ce nombre cubique. Le nombre 27 qui est fait de 3 multiplié premierement par lui-même, ce qui fait 9, & de ce produit par le même nombre 3, ce qui fait 27, est un nombre cubique, dont 3 est la racine cubique.

Lorsqu'un nombre n'est ni quarré ni cube, & qu'ainsi on ne connoit point de nombre, ou qu'il n'y en a point, comme on le démontrera, qui puisse être sa racine, alors pour exprimer cette racine, on met devant le nombre dont elle est racine, ce signe $\surd$ qu'on appelle *Signe radical*, parce qu'il sert à marquer les racines.

Quand la grandeur devant laquelle on le met est complexe, c'est-à-dire composée de deux ou plusieurs grandeurs, jointes par le signe $+$ ou $-$; si c'est la racine de toute la grandeur complexe qu'on veut marquer, on allonge une des jambes du signe radical, pour qu'il comprenne toute la grandeur; ainsi, $\surd \overline{xx+aa}$: & cela s'appelle une racine universelle.

Autrefois on mettoit après le signe radical la premiere lettre de la puissance dont ce signe marquoit la racine. Ainsi $\surd Q$ si c'étoit une racine quarrée. $\surd C$ si c'étoit une racine cube. $\surd QQ$ si c'étoit une racine de quarré quarré; comme $\surd QC$ si c'étoit une racine d'un quarré cube. Maintenant, on met dans le signe radical l'exposant de la puissance dont il marque la racine; ainsi $\surd^2$ au lieu de $\surd Q$, pour dire que c'est une racine quarrée. Quand on voit ce signe seul, il faut suppléer l'exposant de la seconde puissance qui est 2. On exprime ainsi les

autres

autres racines $\sqrt{\sqrt{\sqrt{}}}$. Ces nombres qui sont dans le signe radical, sont les exposans des puissances.

LEMME.

Toute puissance doit être censée nombre quarré ou cube, &c. lors que sa racine est égale à un nombre. 9

Si x racine de x^2 de x^3 de x^4 est égale à un nombre, x^2 doit être égal à un nombre quarré, x^3 à un nombre cube; car ce nombre auquel x est égal, multiplié quarrément, sera égal à x^2; multiplié cubiquement, il sera égal à x^3.

PROPOSITION PREMIERE.

Théorême, premier.

Un nombre quarré multipliant un nombre qui n'est pas quarré, le produit ne sera pas un nombre quarré. 10

Soit 18 nombre non quarré multiplié par le quarré de 2 qui est 4, le produit 72 ne sera pas quarré. Soit $18 = xx$ & $aa = 4$, le produit de 18 par 4 est 72, comme celui de xx par aa est $xaxa$, ainsi $xaxa = 72$. & $xa = \sqrt{72}$. Si donc 72 étoit un nombre quarré, il auroit une racine qui se pourroit exprimer en nombre, c'est-à-dire que xa seroit égale à un nombre. Or connoissant une des racines de ce nombre xa, savoir a qui est 2, on connoit la seconde, savoir x: par conséquent xx ou 18 seroit un nombre quarré, ce qui est faux. Il ne se peut donc pas faire que le produit d'un nombre non-quarré multiplié par un nombre quarré, soit nombre quarré; mais prenez garde que deux nombres qui ne sont pas quarrez peuvent en se mul-

multipliant produire un nombre quarré. Car 3 & 12 ne sont pas des nombres quarrez, mais le produit de leur multiplication 36, est un nombre quarré.

Seconde Proposition.

Théorême second.

11 *Le produit de deux nombres quarrez est toujours un nombre quarré, qui a pour sa racine un plan fait des deux racines de ces deux nombres quarrez.*

Soient donnez ces deux nombres quarrez 4 & 16, dont le produit est 64. 1°. Il faut démontrer que ce produit est un nombre quarré. Soit $aa=4$, & $bb=16$, aa étant multiplié par bb, cela fait $aabb=64$. La racine quarrée de $aabb$ est ab, égale à celle de 64. Or la valeur de ab est connue; car a est égal à la racine de 4 qui est 2, & b est égal à 4, racine de 16. Donc ab est égal au produit de 2 & de 4, qui est 8. Ainsi la racine de 64 se pouvant exprimer par nombre, il faut conclure par le Lemme précédent, que 64 est un nombre quarré.

2°. Il est manifeste que la racine ab du quarré $aabb$ est le produit de a & de b, qui sont les racines des quarrez aa & bb: ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire 1.

12 *Dont un nombre quarré multiplié par lui-même, produit un nombre quarré.*

Car le produit de cette multiplication est fait par deux nombres quarrez. Ainsi 4 par 4 fait 16, qui est un nombre quarré.

Troi-

TROISIEME PROPOSITION.

Troisieme Théorême.

Deux raisons de nombre à nombre étant égales, le produit des antécédens & le produit des conséquens sont entre eux comme deux nombres quarrez. 13

Soient *a b* :: *c d*. La raison de *a* à *b* est de nombre à nombre, comme aussi celle de *c* à *d*. Il faut prouver que *ac* est à *bd* comme deux nombres quarrez. Ainsi si $a = 12$, $b = 24$, $c = 8$, $d = 16$, il faut prouver que 12×8, ou 96 est à 24×16 ou 384, comme deux nombres quarrez.

Ces deux raisons étant égales, elles ont les mêmes exposans. Ainsi en les réduisant aux moindres termes, on les réduit à ces nombres 1. 2 :: 1. 2. Les deux antécédens de ces deux raisons sont un même nombre, & les deux conséquens sont aussi un même nombre; ainsi par la définition des nombres quarrez, le produit 1 des antécédens & 4 produits des conséquens, seront des nombres quarrez. Les raisons composées de raisons égales sont égales: Donc *ac* ou 96 est à *bd* ou à 384 comme 1 à 4, & par conséquent comme deux nombres quarrez: ce qu'il falloit démontrer.

QUATRIEME PROPOSITION.

Théorême quatrième.

Le produit de deux nombres plans semblables, c'est-à-dire dont les racines sont proportionnelles, est un nombre quarré. 14

Soient ces deux nombres plans 8 & 18, les racines du premier sont 2 & 4, celles du second sont

ſont 3 & 6. Ces quatre racines ſont en proportion, 2. 3 :: 4. 6. Donc par la Propoſition précédente, les plans 8 & 18 faits de ces racines ſont entre eux comme deux nombres quarrez, ſavoir 4 & 9, qui ſont les quarrez des moindres termes 2 & 3, auxquels peuvent être réduites les deux raiſons égales des plans propoſez: ainſi 8. 18 :: 4. 9; par conſéquent 8. 4 :: 18. 9.

Par la même raiſon le produit 144 des antécédens 8 & 18, eſt à 36 produit des conſéquens quarrez 4 & 9, comme deux nombres quarrez; ſavoir comme 4 eſt à 1, qui ſont les quarrez des moindres termes auxquels les raiſons de 8 à 4 & de 18 à 9, peuvent être réduites: Ainſi,

144. 36 :: 4. 1.

Lors que les quarrez ſont en proportion, leurs racines ſont proportionnelles, Liv. IV. n. 29. Donc $\sqrt{144}$ $\sqrt{36}$ :: $\sqrt{4}$ $\sqrt{1}$. Ainſi la raiſon de la racine 36 à celle de 144 eſt connue, puiſqu'elle eſt égale à celle qui eſt entre la racine de 1 & celle de 4 qui eſt 2. Le produit 36 fait par les nombres quarrez 4 & 9, eſt un nombre quarré, *ſup.* n. 11. Donc la racine de 144 ayant une raiſon connue à un nombre connu qui eſt la racine quarrée du nombre quarré 36, par le Lemme ci-deſſus propoſé, ce nombre 144, qui eſt le produit de 8 & de 18, ſera un nombre quarré: ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION CINQUIEME.

Cinquieme Théorême.

15 *Le produit de deux nombres cubiques, eſt un nombre cubique.*

Soient ces deux nombres cubiques 8 & 27, la racine de 8 eſt 2, celle de 27 eſt 3. Je nomme

aaa le nombre 8, & *bbb* le nombre 27. Le produit de 8 par 27 eſt 216, égal par conſéquent à cette grandeur *aaabbb*, produit de *aaa* par *bbb*. La racine cubique de ce produit eſt *ab*. Or puiſ que *a* eſt égal à 2, & *b* égal à 3; donc *ab* eſt égal à 6. Ainſi la racine cubique du produit 216, qui eſt égal à la grandeur *aaabbb*, eſt 6; par conſéquent ce nombre eſt cubique: ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Donc un nombre cubique multiplié par lui-même 16
produit un nombre cubique.

Car le produit de cette multiplication eſt fait par deux nombres cubiques. Ainſi 8 par 8 fait 64 qui eſt un nombre cubique.

SIXIEME PROPOSITION.

Théorême ſixieme.

Trois raiſons de nombre à nombre étant égales, 17
le produit des trois antécédens ſera au produit des trois conſéquens, comme deux nombres cubiques.

Soient *b. c* :: *f. g* :: *h. l.* le produit des antécédens de ces raiſons eſt *bfh*, & celui des conſéquens eſt *cgl*: il faut démontrer que *bfh* eſt à *cgl*, comme un nombre cubique eſt à un autre nombre cubique.

La raiſon de *b* à *c* a pour expoſans ces deux nombres 2, 3; donc les trois raiſons données étant égales, elles auront pour expoſans les mêmes nombres 2. 3 :: 2. 3 :: 2. 3. Ainſi les trois antécédens de ces nombres ſont trois mêmes nombres, & les trois conſéquens trois mêmes nombres; donc par la définition des nombres cubiques, le produit des antécédens qui eſt 8, & le produit des conſéquens qui eſt 27, ſeront deux nombres cubiques. La raiſon de 8 à 27 eſt compoſée

posée des mêmes raisons dont la raison de *bfh* à *cgl*, est composée : donc ces deux produits *bfh* & *cgl*, seront entre eux comme 8 est à 27. Or ces deux nombres sont cubiques ; donc *bfh* est à *cgl*, comme un nombre cubique est à un autre nombre cubique : ce qu'il falloit prouver.

Septieme Proposition.
Théorême septieme.

18 *Le produit de deux nombres solides semblables, c'est-à-dire dont les racines sont proportionnelles, est un nombre cube.*

Cela se démontre de la même maniere qu'on a prouvé que le produit de deux plans semblables est un nombre quarré.

Avertissement.

De ce que nous avons démontré touchant les secondes & troisiemes puissances, il suit clairement que le produit de deux puissances numeriques d'un même degré, est un nombre de la même puissance ; par exemple, qu'un nombre quarré de quarré, multiplié par un nombre quarré de quarré, produit un nombre quarré de quarré. Que si quatre raisons de nombre à nombre sont égales, le produit des antécédens est à celui des conséquens, comme deux nombres de quarrez de quarré : ainsi des cinquiemes, sixiemes puissances numeriques à l'infini.

Il faut se souvenir ici que dans le langage des anciens Géometres, le quarré est la premiere puissance, & le cube la seconde. Nous avons vu les raisons que les nouveaux Géometres ont eu de changer ce langage.

SECTION SECONDE.

Règles pour connoitre ſi des Grandeurs propoſées ſont commenſurables ou incommenſurables.

Avertissement.

J'Abrege autant que je le puis cette doctrine de la commenſurabilité & incommenſurabilité, parce qu'il ſuffit dans les Elémens d'en donner les principes généraux. Je ne parle ici que de ce qui peut être commun à toutes ſortes de grandeurs. Je ne touche point à ce qui appartient à la Géometrie.

DEFINITIONS.

Premiere Definition.

Deux Grandeurs ſont commenſurables, lors que 19
la raiſon qui eſt entre elles ſe peut exprimer par nombre; incommenſurables, ſi cette raiſon eſt ſourde.

Seconde Definition.

Si deux Grandeurs n'étant pas comme nombre à 20
nombre, leurs quarrez ou leurs cubes ſont comme nombre à nombre, on dit alors que ces grandeurs ſont incommenſurables en elles-mêmes, mais qu'elles ſont commenſurables en puiſſance.

Si $xx = 18$ & $aa = 25$, la racine de 18 ou de xx qui eſt x, eſt incommenſurable avec a racine de aa; mais ces racines qui ſont incommenſurables en elles-mêmes, ſont commenſurables en puiſſance, puis que $xx.\ aa :: 18.\ 25$.

De-

DEMANDE.

21 *Si un nombre mesure une certaine grandeur, toute autre grandeur qui lui est incommensurable est aussi incommensurable avec ce nombre.*

Soit 3 commensurable avec 12, avec lequel x est incommensurable : je dis que 3 & x sont incommensurables : car, si x étoit un certain nombre de fois dans 12, ou 12 dans x, il est évident que 3 seroit aussi en x d'une maniere qui s'exprimeroit par nombre.

PROPOSITION HUITIEME.

Huitieme Théorême.

22 *La raison doublée ou triplée d'une raison de nombre à nombre, est aussi une raison de nombre à nombre, qui a pour ſes expoſans des nombres quarrez ſi elle eſt doublée, & des nombres cubiques ſi elle eſt triplée.*

La raiſon doublée eſt une raiſon compoſée de deux raiſons égales, dont les antécédens ont été multipliez l'un par l'autre, & les conſéquens de la même maniere l'un par l'autre; par conſéquent *ſup.* n. 13, ces deux produits qui ſont les termes de la raiſon doublée, ſont entre eux comme deux nombres quarrez; ainſi cette raiſon a pour ſes expoſans des nombres quarrez.

Une raiſon triplée eſt compoſée de trois raiſons égales; ainſi les termes de cette raiſon triplée ſont entre eux comme deux nombres cubiques *ſup.* n. 17, & cette raiſon a pour ſes expoſans des nombres cubiques : ce qu'il falloit démontrer.

PRO-

PROPOSITION NEUVIEME.

Théorême neuvieme.

Une raiſon ſimple eſt ſourde, ſi la raiſon doublée ou triplée de cette raiſon n'a pas pour ſes expoſans des nombres quarrez ou cubiques. 23

Si xx n'eſt pas à zz comme des nombres quarrez, & xxx à zzz comme des nombres cubiques, je dis que la raiſon de x à z eſt une raiſon ſourde; car ſi elle eſt de nombre à nombre, il faut par la Propoſition précédente, que xx ſoit à zz, ou xxx à zzz comme nombre à nombre, & que la raiſon de xx à zz ait des nombres quarrez pour ſes expoſans, & la raiſon de xxx à zzz, des nombres cubiques : Or par l'hypotheſe cela n'eſt point; il eſt donc impoſſible que la raiſon de x à z ſoit une raiſon de nombre à nombre.

DIXIEME PROPOSITION.

Théorême dixieme.

Trois grandeurs étant continuellement proportionnelles, la raiſon de la premiere à la troiſieme ne peut être que de trois ſortes. 24

1°. *Ou de nombre à nombre, ayant pour ſes expoſans des nombres quarrez.*

2°. *Ou de nombre à nombre n'ayant pas pour ſes expoſans des nombres quarrez.*

3°. *Ou ſourde, & non de nombre à nombre.*

Premier Cas.

Si la raiſon de la premiere grandeur à la troiſieme eſt une raiſon de nombre à nombre, qui a pour ſes expoſans des nombres quarrez, ces trois grandeurs ſont commenſurables.

Soient $\frac{a}{\cdot\cdot}$ $b.c.d.$ trois grandeurs : $b.d::4.9.$ le produit des nombres quarrez 4 & 9 qui eſt 36,

ſera *ſup.* n. 11, un nombre quarré dont la racine ſe pourra par conſéquent exprimer par ce nombre 6. Or 6 eſt le produit de la racine de 4 qui eſt 2, multiplié par la racine de 9 qui eſt 3. Donc Liv. IV. n. 20. ce nombre 6 eſt un moyen proportionnel entre 4 & 9. Donc puis que *c* eſt un moyen proportionnel entre *b* & *d*, il faut que $c = 6$. Ainſi ces trois grandeurs *b. c. d.* ſeront commenſurables, puiſque la raiſon qu'elles ont entre elles ſe peut exprimer avec des nombres.

Second Cas.

Si la raiſon de la premiere grandeur à la troiſieme, eſt une raiſon de nombre à nombre qui n'ait pas pour ſes expoſans des nombres quarrez, la moyenne grandeur eſt incommenſurable en elle-même, & commenſurable en puiſſance à la premiere & à la troiſieme.

Soient ... *k. l. m.* trois grandeurs $k\ m :: 3.4$. La raiſon de *k* à *m* eſt doublée de la raiſon de *k* à *l*, ou compoſée des deux raiſons égales de *k* à *l* & de *l* à *m*. Or 3 & 4, qui ſont les expoſans de cette raiſon doublée de *k* à *m*, ne ſont pas deux nombres quarrez ; les deux raiſons de *k* à *l* & de *l* à *m* dont cette raiſon eſt compoſée, ne peuvent donc être des raiſons de nombre à nombre, par la neuvieme Propoſition ci-deſſus. Donc *k* & *l* ſont incommenſurables, comme auſſi *l* & *m*. Mais puiſque Liv. IV. n. 32.

$$\left.\begin{matrix} kk. & ll \\ ll. & mm \end{matrix}\right\} :: k. m. \text{ ou } 3.4.$$

Donc *kk*, *ll*, *mm*, ſont commenſurables ; donc *k*, *l*, *m*, que l'on a démontré être incommenſurables en elles-mêmes, ſont commenſurables en puiſſance, c'eſt-à-dire que leurs quarrez ſont commenſurables ; ce qu'il falloit prouver. *kk*

eſt

eſt à *ll* comme 3 à 4, & *ll* eſt à *mm* comme 3 à 4.

On ſe tromperoit ici, ſi on prenoit pour expoſans d'autres nombres que ceux qui ſont les plus petits. Car par exemple, ſi on prend ces trois nombres 3. 6. 12, *auxquels ſoient égaux* k, l, m; *il eſt vrai que* k. l. m :: 3. 6. 12. *Ainſi* k. l. m. *ſont commenſurables, quoique la raiſon de* k *à* m *qui eſt double de celle de* k *à* l, *& de celle de* l *à* m, *ne ſoit pas comme celle de deux nombres quarrez; car* 3 *&* 12 *ne le ſont pas. Mais ſi on réduit ces nombres aux plus petits, on aura* 1. 2. 4. *alors* k *ſera à* m *comme* 1 *à* 4, *qui ſont deux nombres quarrez, ce qui rentre dans le premier cas. Les nombres expoſans d'une raiſon ſont toujours les plus petits de ceux qui la puiſſent expoſer.*

Troiſieme Cas.

Si la raiſon de la premiere grandeur à la troiſieme n'eſt pas de nombre à nombre, la moyenne grandeur ſera incommenſurable, tant en elle-même qu'en puiſſance.

N'étant pas de nombre à nombre, elle n'eſt pas par conſéquent comme des nombres quarrez. Ainſi la raiſon ſimple de la premiere à la ſeconde dont celle de la premiere à la troiſieme eſt doublée, ſera ſourde par la 9e Propoſition ci-deſſus. On ſuppoſe toujours que la premiere grandeur eſt connue; par conſéquent ſi la raiſon qu'elle a avec la ſeconde eſt ſourde, il faut que celle-ci ſoit inconnue, & qu'elle ne ſe puiſſe exprimer en nombres, non plus que la troiſieme.

Cette ſeconde grandeur ſera auſſi incommenſurable en puiſſance, parce que le quarré de la premiere eſt au quarré de la ſeconde, comme la premiere eſt à la troiſieme, Liv. IV. n. 32. Donc ſi la raiſon de la premiere à la troiſieme n'eſt pas

de nombre à nombre, la raiſon du quarré de la premiere au quarré de la ſeconde, ne ſera pas de nombre à nombre. La premiere & la ſeconde ſont donc incommenſurables en puiſſance. Il en eſt de même de la ſeconde à la troiſieme : ainſi ces trois grandeurs ſont incommenſurables en elles-mêmes & en puiſſance.

Onzieme Proposition.

Théorême onzieme.

25 *Quatre grandeurs étant continuellement proportionnelles, la raiſon de la premiere à la quatrieme ne pouvant être que de trois ſortes, voici ce qui arrivera.*

Premier Cas.

Si la raiſon de la premiere à la quatrieme eſt une raiſon de nombre à nombre qui ait pour ſes expoſans des nombres cubiques, ces quatre grandeurs ſeront commenſurables.

Soient $\frac{a}{c} \frac{b}{d}$ *b. c. d. f.* quatre grandeurs, *b. f* :: 8. 27. puis que 8 & 27, ſont deux nombres cubiques, leurs racines ſont connues; celles de 8 eſt 2, celle de 27 eſt 3. Multipliant le quarré de la premiere racine, lequel eſt 4, par la ſeconde racine qui eſt 3, ce qui produit 12; & 9 quarré de la ſeconde racine par la premiere racine qui eſt 2, ce qui produit 18, ces deux produits 12 & 18, ſeront deux moyens proportionnels entre 8 & 27. Liv. IV. n. 21. Partant *b. c. d. f* :: 8. 12. 18. 27. Ainſi les raiſons que ces quatre grandeurs ont entre elles pouvant être exprimées par nombres, elles ſont commenſurables.

Second Cas.

Si la raiſon de la premiere à la quatrieme eſt une raiſon de nombre à nombre qui n'ait pas pour ſes expo-

expoſans des nombres cubiques, la premiere & la ſeconde grandeur ſont incommenſurables en elles-mêmes, & commenſurables en troiſieme puiſſance; & il en eſt de même de la ſeconde & de la troiſieme, comme auſſi de la troiſieme & quatrieme grandeur.

Soient ∴ *k. l. m. n.* on ſuppoſe que *k. n* :: 3. 4. la raiſon de *k* à *n* étant triplée de la raiſon de *k* à *l*, ou compoſée des trois raiſons égales de *k* à *l*, de *l* à *m*, de *m* à *n*; chacune de ces trois raiſons égales ne ſauroit être de nombre à nombre, *ſup.* n. 23. puiſque la raiſon de *k* à *n* qui eſt triplée de ces raiſons, a pour ſes expoſans les nombres 3 & 4, qui ne ſont pas des nombres cubiques: Ainſi elles ſont incommenſurables, *k* avec *l*, *l* avec *m*, & *m* avec *n*. Mais Liv. IV. n. 33.

$$\left.\begin{matrix} kkk. & lll \\ lll. & mmm \\ mmm. & nnn \end{matrix}\right\} :: \left\{\begin{matrix} k. & n. \\ \text{ou} & \\ 3. & 4. \end{matrix}\right.$$

Donc ces cubes ſont commenſurables, puiſqu'ils ſont comme 3 à 4; par conſéquent les 4 grandeurs propoſées *k. l. m. n.* ſont commenſurables en troiſieme puiſſance, puis que leurs cubes ſont commenſurables.

Troiſieme Cas.

Si la raiſon de la premiere à la quatrieme grandeur n'eſt pas de nombre à nombre, la premiere & la ſeconde, la ſeconde & la troiſieme, la troiſieme & la quatrieme, ſont incommenſurables tant en elles-mêmes qu'en troiſieme puiſſance.

1°. Puiſque la raiſon de la premiere à la quatrieme qui eſt triplée des raiſons de ces quatre grandeurs, n'eſt pas comme des nombres cubes, n'étant pas même de nombre à nombre *ſup.* n. 23. ces raiſons de ces quatre grandeurs ſont

ſourdes ; ainſi elles ſont incommenſurables en elles-mêmes.

2°. Ces grandeurs ſont pareillement incommenſurables en troiſieme puiſſance : parce que la raiſon du cube de la premiere au cube de la ſeconde, eſt la même que la raiſon de la premiere grandeur à la quatrieme, que l'on ſuppoſe n'être pas de nombre à nombre.

DOUZIEME PROPOSITION.

Douzieme Théorême.

26 *Si deux grandeurs quarrées n'ont pas des nombres quarrez pour les expoſans de leur raiſon, les racines en ſont incommenſurables.*

Et de même ſi deux grandeurs cubiques n'ont pas pour les expoſans de leur raiſon des nombres cubiques, elles ſont incommenſurables.

Car les quarrez ſont en raiſon doublée de leurs racines, & les cubes en raiſon triplée. Or *ſup.* n. 23. ſi deux raiſons ou doublées ou triplées n'ont pas pour expoſant des nombres quarrez ou des nombres cubiques, les raiſons dont elles ſont compoſées ſont ſourdes : Ainſi les racines des quarrez ou des cubes qui ne ſont pas entre eux comme nombre à nombre, n'ont entre elles qu'une raiſon ſourde ; ainſi elles ſont incommenſurables.

TREIZIEME PROPOSITION.

Treizieme Théorême.

27 *Entre deux nombres qui n'ont pas pour expoſans de leur raiſon des nombres quarrez, on ne peut trouver un nombre qui ſoit moyen proportionnel ; & entre deux nombres qui n'ont pas pour expoſans de leur raiſon des nombres cubiques, on ne peut pas trouver deux nombres qui ſoient moyens proportionnels.*

Car

Car ſi la premiere de ces deux choſes ſe pouvoit, trois grandeurs proportionnelles ſeroient commenſurables, quoi que la premiere ne fût pas à la troiſieme comme deux nombres quarrez ; ce qui eſt impoſſible par le ſecond Cas de la Propoſition dixieme.

Et ſi la ſeconde ſe pouvoit, quatre grandeurs proportionnelles ſeroient commenſurables, quoique la premiere ne fût pas à la quatrieme comme deux nombres cubiques ; ce qui eſt impoſſible par le ſecond Cas de la Propoſition onzieme.

COROLLAIRE I.

Deux nombres ne ſont pas quarrez, ſi les expoſans 28
de leur raiſon ne ſont pas des nombres quarrez.

Soient *bb*. *cc* :: 1. 2. ces deux nombres 1 & 2 expoſans de la raiſon de *bb* à *cc*, n'étant pas quarrez, *bb* & *cc* ne le peuvent être ; car par la Propoſition précédente, entre *bb* & *cc* on ne peut trouver de moyen proportionnel ; ce qui ſe pourroit faire ſi *bb* & *cc* étoient deux nombres quarrez ; car le produit *bbcc* ſeroit un nombre quarré. *ſup.* n. 11. Dont la racine *bc*, Liv. IV. n. 20, ſeroit moyen proportionnel entre *bb* & *cc*.

COROLLAIRE 2.

Ainſi l'on voit évidemment que l'on ne peut trou- 29
ver un nombre quarré qui ſoit moitié, ou tiers, ou la cinquieme partie, ou la ſixieme, ou la ſeptieme d'un autre nombre quarré, &c.

Puis que ces nombres 2. 3. 5. 6. 7. expoſans de ces raiſons, ne ſont point des nombres quarrez.

COROLLAIRE 3.

Deux nombres ne ſont point cubiques, ſi les ex- 30

poſans de leur raiſon ne ſont pas nombres cubiques.

Soient *ddd fff* :: 1. 2. Ces deux nombres 1. 2. qui ſont les expoſans, ne ſont pas cubiques; partant *ddd* & *fff*, ne le peuvent être. Car par la Propoſition précédente, on ne peut pas trouver deux moyens proportionnels entre *ddd* & *fff*, ce qui ſe pourroit faire néanmoins, Liv IV. n. 36, ſi *ddd* & *fff* étoient deux nombres cubiques.

COROLLAIRE 4.

31 *Ainſi on voit qu'on ne peut pas trouver un nombre cubique qui ſoit ou moitié, ou tiers, ou la quatrieme, ou la cinquieme, ou la ſixieme, ou la ſeptieme partie, &c. d'un autre nombre cubique.*

Puis que ces nombres 2. 3. 4. 5. 6. 7. &c. ne ſont pas des nombres cubiques.

QUATORZIEME PROPOSITION.
Quatorzieme Théorême.

32 *On ne peut exprimer par nombres, ſoit entiers, ſoit rompus, la valeur de la racine d'une puiſſance imparfaite.*

Soit ce nombre 18, qui n'eſt pas un nombre quarré. Car il eſt évident qu'il n'y a point de nombre entier qui multiplié par lui même faſſe 18. On pourroit, comme on l'a dit, penſer qu'il pourroit y avoir quelque nombre rompu, qui exprimât la valeur de ſa racine, que je nomme *x*; mais je vais démontrer que cela eſt impoſſible; car ſi cela étoit, la raiſon de *x* à 18 ne ſeroit pas ſourde, Or elle l'eſt, ce que je prouve ainſi. Je multiplie 18 par 1, ce qui fait 18, que je puis ainſi conſiderer comme un nombre plan, dont la racine quarrée eſt un moyen proportionnel entre 1 & 18. Liv. III. n. 68.

n. 68. Ainsi $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 1. x. 18. Or par le second Cas de la dixieme Proposition ci-dessus, la raison de 1 à 18 n'ayant pas pour ses exposans des nombres quarrez, x est incommensurable avec 1 & avec 18.

Donc par la Demande *sup.* n. 21. tout nombre ou toute grandeur commensurable avec 18 ou avec 1, ne le sera pas avec x; ainsi x ne se peut exprimer avec aucun nombre. Sa raison avec 18 est donc sourde: ce qu'il falloit démontrer.

Soit donné le nombre 24 qui n'est pas cubique, je nomme x sa racine cubique, & prenant le cube de 1, qui est 1. $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 1. 1x. 1xx. 24. *Liv.* IV. n. 21. Par le second Cas de la onzieme Proposition ci-dessus, la raison de 1 avec 1x & 1xx à 24, est sourde. Or 1xx est la même chose que xx, & de même 1x & x. Donc x étant incommensurable avec 1 & 24, grandeurs commensurables, il sera aussi incommensurable avec tout autre nombre, & ne se pourra point exprimer.

Ainsi de toutes les autres puissances imparfaites.

Autre Démonstration.

Pour avoir une démonstration sensible qu'il n'y a point de nombre rompu qui puisse exprimer la valeur de x qu'on suppose la racine quarrée de 18, il faut se souvenir que pour réduire 18 en fraction afin d'avoir une racine plus grande que 4 racine de 16, nombre quarré qui approche le plus de 18, il faut multiplier 18 par le quarré de la fraction dans laquelle on a réduit 18. page 293. Ce produit n'est point un nombre quarré *sup.* n. 10. Donc en ayant ôté la racine quarrée du plus prochain, il restera encore quelque chose. Prenant une plus petite fraction,

on aura encore un nombre qui ne ſera pas quarré. Il eſt bien vrai qu'on trouvera une racine plus grande que la précédente, mais moindre que la véritable; ainſi, puiſque quelque petite fraction qu'on prenne, ce ne ſera jamais un quarré, il y aura toujours du reſte, ſans pouvoir jamais venir à une grandeur préciſément égale à *x*.

SECTION TROISIÈME.

Des Opérations de l'Arithmetique ſur les Grandeurs incommenſurables.

CHAPITRE PREMIER.

On peut faire toutes les Opérations de l'Arithmetique ſur les Grandeurs incommenſurables. Préparations pour cela.

33 QUOI qu'on ne connoiſſe point la valeur d'une racine ſourde, on peut néanmoins faire ſur elle toutes les opérations de l'Arithmetique, l'ajouter avec une autre racine ou l'en ſouſtraire, les multiplier ou les diviſer l'une par l'autre. Ces racines, qu'on nomme Grandeurs irrationnelles ou ſourdes, ſe rencontrent ſouvent. L'extraction des racines, ſoit de celles qui ſont quarrées, ſoit de celles qui ſont cubiques, eſt une opération fort ordinaire. Comme il y a donc plus de nombres qui ne ſont ni quarrez ni cubiques, que de nombres quarrez ou cubiques, à tous mo-

mens

mens on trouve des racines ſourdes ; ainſi il eſt important de connoître comment on peut opérer ſur ces ſortes de grandeurs : mais avant que de faire ces opérations ſur les racines ſourdes, il les faut préparer. Cette préparation eſt aiſée ; elle eſt fondée ſur la Demande ſuivante.

DEMANDE.

Une racine ne devient pas plus grande lors qu'de racine quarrée qu'elle étoit on fait qu'elle eſt racine cubique, ou racine quarrée de quarré, en augmentant les dimenſions de la grandeur dont elle eſt la racine.

Par exemple, a eſt la racine de toutes ces puiſſances, $a^2 . a^3 . a^4 . a^5$. ainſi leurs racines ne valent pas l'une plus que l'autre.

PROPOSITION QUINZIEME.

Problême premier.

Réduire deux ou pluſieurs racines ſourdes à un même nom ou même ſigne.

Pour réduire deux racines au même nom, il faut élever la plus petite puiſſance à la plus grande, ſelon qu'on l'a enſeigné ; ſi la premiere eſt $\sqrt[3]{aa}$, & la ſeconde $\sqrt[3]{b^3}$, j'augmente aa d'une dimenſion, & alors $\sqrt[3]{a^3}$. & $\sqrt[3]{b^3}$, auront un même nom, ce ſeront deux racines cubiques : ce qui ne change point leur valeur, car par la Demande précédente $\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[2]{a^2}$.

Quand on veut réduire une grandeur abſolue à un même nom avec une racine donnée, il faut prendre le quarré ou le cube de la grandeur abſolue, ſelon que la racine propoſée eſt

racine de quarré ou de cube, &c. Ainſi s'il faut réduire 5 & $\sqrt{}$ 27 au même nom, je prens le quarré de 5 qui eſt 25, devant lequel je mets le ſigne radical ainſi, $\sqrt{}$ 25. Après cela 5 & $\sqrt{}$ 27 ſont réduits au même nom ſans changer leur valeur; car $\sqrt{}$ 25 eſt la même choſe que 5.

L'on ne peut pas toujours ſelon cette règle réduire au même ſigne deux racines ſourdes. Par exemple, ſoient données ces deux racines $\sqrt{}$ 5 & $\sqrt[3]{}$ 40; pour élever cette racine $\sqrt{}$ 5, de quarrée la faire une racine cubique, il faudroit multiplier le quarré 5 par ſa racine quarrée, ce qui eſt impoſſible, puiſque cette racine eſt ſourde. Il faut donc élever ces deux racines propoſées à de plus hautes puiſſances, ſans qu'il ſoit beſoin de connoître la valeur de la racine quarrée de 5, ni celle de la racine cubique de 40. Dans l'exemple propoſé, multipliant 5 par lui-même, on fait 25, qui eſt un quarré de quarré dont la racine eſt $\sqrt[4]{}$ 25, qui eſt la même choſe que $\sqrt{}$ 5; & en multipliant le quarré de quarré 25 par le quarré, j'aurai 125 qui eſt un quarré cube dont la racine eſt $\sqrt[6]{}$ 125, égale à $\sqrt{}$ 5. En multipliant le cube 40 par lui-même cela fait 1600, qui eſt un quarré cube dont la racine eſt $\sqrt[6]{}$ 1600, égale à $\sqrt[3]{}$ 40. Ainſi les deux racines $\sqrt{}$ 5 & $\sqrt[3]{}$ 40, étant réduites à celles-ci $\sqrt[6]{}$ 125 & $\sqrt[6]{}$ 1600, elles ont un même nom.

DEFINITION.

36. *On appelle Expoſant d'une grandeur incommenſurable, l'expreſſion la plus ſimple qui puiſſe marquer ſa juſte valeur.*

LEM-

LEMME.

Une puiſſance faite par la multiplication de deux puiſſances, a pour racine le produit des deux racines de ces deux puiſſances. 37

Soit *aaxx*, fait de la multiplication de *aa* par *xx*, la racine de ce quarré eſt *ax* produit des racines des deux quarrez *aa* & *xx*. De même ſoit *aaaxxx* fait de la multiplication de *aaa* par *xxx*, la racine de ce cube eſt *ax* produit des deux cubes *aaa* & *xxx*, ce qui eſt évident.

On ne met le ſigne radical que devant les puiſſances imparfaites, pour marquer leur racine. Les racines de celles qui ſont parfaites s'expriment ſimplement ſans ce ſigne. Ainſi au lieu de $\sqrt{}$ aa, *on écrit ſimplement* a. *Car* $\sqrt{}$ aa = a.

PROPOSITION SEIZIEME.

Problême ſecond.

Réduire les racines ſourdes à des expreſſions plus ſimples, ou aux plus petits termes avec leſquels elles puiſſent être exprimées. 38

Cette réduction ne ſe peut faire que lors que les puiſſances devant leſquelles eſt placé le ſigne radical, ſont telles qu'elles peuvent être diviſées par un diviſeur, lequel, ou le quotient de la diviſion, ſoit un nombre quarré ou cube. Par exemple, on pourroit réduire $\sqrt{}$ 27 à une expreſſion plus ſimple, diviſant 27 par 9, un nombre quarré, le quotient de cette diviſion eſt 3, que j'écris après le ſigne radical devant lequel j'écris la racine de 9 qui eſt 3, ainſi 3 $\sqrt{}$ 3 = $\sqrt{}$ 27.

Puiſque 9 eſt trois fois dans 27, donc 9×3 = 27; donc conſiderant 9 & 3 comme deux quarrez,

rez, le produit de leurs racines qui ſont 3 & $\sqrt{3}$ ſera la racine de 27, par le Lemme précédent. Ainſi $3\times\sqrt{3}$ ou $3\sqrt{3}=\sqrt{27}$. Ainſi $3\sqrt{3}$ eſt l'expoſant de cette grandeur incommenſurable $\sqrt{27}$.

Pour réduire à un même terme deux grandeurs incommenſurables, il faut trouver, ſi cela eſt poſſible, un commun diviſeur qui ſoit tel, que le quotient de la diviſion ſoit une puiſſance parfaite. Soient données ces deux grandeurs incommenſurables $\sqrt{75}$ & $\sqrt{27}$ pour les réduire à de plus petits termes, je diviſe 75 & 27 par 3; les quotiens ſont 25 & 9 nombres quarrez, dont les racines ſont 5 & 3. Je les place devant le ſigne radical $\sqrt{}$, après lequel je mets le diviſeur 3 de cette maniere, $5\sqrt{3}$ & $3\sqrt{3}$; & je dis que $5\sqrt{3}=\sqrt{75}$ & $3\sqrt{3}=\sqrt{27}$; comme nous venons de le démontrer.

COROLLAIRE.

39 *On peut connoître quelle eſt la raiſon de deux racines ſourdes.*

Ayant réduit ces deux racines $\sqrt{75}$ & $\sqrt{27}$ à cette expreſſion $5\sqrt{3}$ & $3\sqrt{3}$, puiſque deux produits dont un des multiplicateurs eſt le même, ſont entre eux comme les multiplicateurs inégaux; donc $5\sqrt{3}.\ 3\sqrt{3} :: 5.\ 3$. Ainſi une racine qui n'eſt pas commenſurable avec le quarré dont elle eſt la racine, peut être commenſurable avec une autre racine ſourde.

DEFINITION.

40 *Les racines ſourdes dont on peut ainſi exprimer la raiſon, ſont appellées* communicantes *ou* commenſurables.

PRO-

PROPOSITION DIX-SEPTIEME.

Problême troiſieme.

Trouver ſi deux racines ſourdes ſont commenſurables ou communicantes entre elles. 41

Cela ſe trouve par la multiplication & par la diviſion. 1°. Multipliant deux grandeurs propoſées l'une par l'autre, ſi leur produit eſt un nombre quarré, leurs racines ſont *communicantes*. Soient ces deux grandeurs $\sqrt{2}$ & $\sqrt{8}$, je multiplie 2 par 8; le produit 16 eſt un nombre quarré, dont 4 la racine montre que $\sqrt{2}$ eſt à $\sqrt{8}$ comme 1 à 2, ce que je démontre.

Soit $2 = xx$ & $8 = zz$, partant $\sqrt{2} = x$ & $\sqrt{8} = z$, le produit de xx par zz eſt $xxzz$ égal à 16. ainſi $xz = 4$. Or Liv. IV. n. 20. $xx. xz :: xz. zz$. Donc $xx. xz :: x. z$, ou ce qui eſt la même choſe $2. 4 :: \sqrt{2}. \sqrt{8}$, & partant $1. 2. :: \sqrt{2}. \sqrt{8}$.

2°. Diviſant deux grandeurs l'une par l'autre, ſi le quotient de la diviſion eſt un nombre quarré, leurs racines ſont *communicantes*. Je diviſe 8 par 2, le quotient 4 eſt un nombre quarré; alors $\sqrt{2}$ eſt à $\sqrt{8}$ comme 1 à 2. Car 2 & 8 diviſez par 2, demeurent en même raiſon. Liv. III. n. 65. Ainſi 2. 8 :: 1. 4. Donc Liv. IV. n. 29. $\sqrt{2}. \sqrt{8} :: \sqrt{1}. \sqrt{4}$ c'eſt-à-dire; que $\sqrt{2}. \sqrt{8} :: 1. 2$. ce qu'il falloit prouver.

Exemples.

Je connois auſſi que les racines $\sqrt{a^4 + aabb}$ & $\sqrt{aabb + b^4}$ ſont commenſurables, parce que diviſant $a^4 + aabb$ par $aa + bb$, le quotient eſt aa, & diviſant $aabb + b^4$ par le même diviſeur $aa + bb$, le quotient ſera bb. Ces deux quotiens aa & bb ſont deux nombres quarrez dont

les

les racines sont a & b; ainsi les deux racines proposées, réduites à leurs expressions les plus simples, selon qu'il a été enseigné *sup.* n. 38. sont $a\sqrt{aa+bb}$ & $b\sqrt{aa+bb}$, lesquelles sont comme a est à b. Soient encore données ces deux racines $\sqrt{12}$ & $\sqrt{3}$, je divise 12 & 3 par 3, les deux quotiens sont 4 & 1 deux nombres quarrez. Donc *sup.* n. 28. $2\sqrt{3}=\sqrt{12}$ & $1\sqrt{3}=\sqrt{3}$; car 1 ne multiplie point. Par cette opération je découvre que l'une de ces deux racines est double de l'autre.

Soient données ces deux racines $\sqrt[3]{135}$ & $\sqrt[3]{320}$ pour connoitre si elles sont commensurables, je divise l'une & l'autre par 135, les quotiens sont 1 & $2\frac{50}{135}$. Je réduis la fraction du dernier quotient à une fraction plus simple, divisant le numerateur & le dénominateur par 5, & vient $\frac{10}{27}$ Liv. V. n. 24. Ainsi $\frac{50}{135}=2\frac{10}{27}$. Je réduis les deux entiers en fraction comme il a été enseigné, écrivant $\frac{54}{27}$, à quoi ajoutant $\frac{10}{27}$, cela fait $\frac{64}{27}$. Je réduis pareillement le premier quotient 1 à une fraction de même nom que cette derniere, écrivant $\frac{27}{27}$. La racine cubique de $\frac{27}{27}$ est $\frac{3}{3}$; celle de $\frac{64}{27}$ est $\frac{4}{3}$: Donc $\sqrt[3]{320}.\sqrt[3]{135} :: \frac{4}{3}.\frac{3}{3} :: 4.3$. Ces exemples peuvent suffire, parceque mon dessein est d'être le plus court que je pourrai.

CHA-

CHAPITRE II.

Les quatre Opérations de l'Arithmetique ſur les Racines ſourdes.

POur faire l'addition des racines, il ne ſuffit pas d'ajouter en une ſomme les grandeurs dont elles ſont racines : car par exemple, ayant ajouté 16 avec 9, cela fait 25, dont la racine quarée qui eſt 5, n'eſt pas 7, ſomme des racines de 9 & de 16 ; il faut donc chercher des règles particulieres. La premiere choſe que l'on doit faire, eſt de réduire au même nom les racines propoſées, ſi elles en ont de differens, & enſuite les réduire à l'expreſſion la plus ſimple.

PROPOSITION DIX-HUITIEME.

Problême quatrieme.

42 *Ajouter dans une ſomme deux ou pluſieurs racines ſourdes.*

Cela ſe peut faire en pluſieurs manieres. 1°. Joignant par le ſigne + les racines données ; ainſi pour ajouter $\sqrt{45}$ avec $\sqrt{30}$, je lie ces deux racines par + en cette maniere $\sqrt{45} + \sqrt{30}$.

2°. Il faut réduire les racines propoſées à un même nom, pour reconnoître ſi elles ſont commenſurables entre elles. Si elles le ſont, il faut ajouter dans une ſomme les expoſans de leur raiſon, & mettre enſuite le ſigne radical avec le diviſeur commun, par lequel les grandeurs dont les racines ſont propoſées, ont été diviſées.

Soient données ces deux racines $\sqrt{75}$ & $\sqrt{27}$, je les réduis à cette expreſſion $5\sqrt{3}$ & $3\sqrt{3}$, qui me-

me fait connoitre que les expoſans de ces racines ſont 5 & 3 que j'ajoute, écrivant ſelon cette règle $8\sqrt{3}$, qui eſt la ſomme de $5\sqrt{3}$ & $3\sqrt{3}$, comme il eſt évident.

3°. Pour ajouter deux racines ſecondes ſourdes d'une troiſieme maniere, il faut premierement ſavoir que multipliant les quarrez de deux racines l'un par l'autre, la racine de ce quarré ſera le plan des deux racines, ce qui eſt évident; xx multiplié par zz produit le quarré $xxzz$, dont la racine xz eſt le plan des racines de xx & zz. Il eſt auſſi évident que la racine quarrée de l'addition de xx avec zz plus deux fois le plan des deux racines de xx & de zz, c'eſt-à-dire $2xz$; il eſt, dis-je, évident que $x+z$ la racine de cette ſomme $xx+2xz+zz$, eſt la ſomme des racines de xx & de zz. Partant pour ajouter $\sqrt{75}$ avec $\sqrt{48}$. 1°. j'ajoute 75 avec 48, ce qui fait 123. 2°. Je multiplie 75 par 48, le produit eſt 3600 dont la racine quarrée 60 eſt le plan des racines $\sqrt{75}$ & $\sqrt{48}$, comme on le vient de voir. Je double 60 ce qui fait 120, que j'ajoute à 123, cela fait 243 dont la racine quarrée qui eſt $\sqrt{243}$, eſt la ſomme de $\sqrt{75}$, ajouté avec $\sqrt{48}$.

Lors que le produit des deux nombres n'eſt pas un nombre quarré comme l'eſt celui de 75 & de 48, on ne peut point en cette maniere ajouter ainſi les racines ſecondes propoſées.

Proposition Dix-neuvieme.

Problême cinquieme.

43 *Souſtraire des Racines ſourdes les unes des autres.*

Cela ſe peut faire auſſi en pluſieurs manieres. 1°. en changeant les ſignes qui précédent les ſignes

ſignes radicaux : pour ſouſtraire $\sqrt{aa-bb}$ de $\sqrt{aa+bb}$, il faut écrire $\sqrt{aa+bb}-\sqrt{aa-bb}$. Pour ôter $\sqrt{40}$ de $\sqrt{50}$, j'écris $\sqrt{50}-\sqrt{40}$.

2°. Lorſque les racines données ſont commenſurables entre elles, il faut retrancher l'expoſant de l'une de l'expoſant de l'autre, & mettre enſuite le ſigne radical avec le diviſeur commun par lequel les grandeurs, dont les racines ſont propoſées, ont été diviſées.

Soient données ces deux racines $\sqrt{75}$ & $\sqrt{27}$, je les réduis à cette expreſſion qui eſt plus ſimple $5\sqrt{3}$ & $3\sqrt{3}$; enſuite pour retrancher $3\sqrt{3}$ de $5\sqrt{3}$, j'écris $2\sqrt{3}$, qui eſt ce qui reſte après cette ſouſtraction, ou ce qui eſt la difference des deux racines propoſées.

3°. Pour les ſecondes racines ſourdes, on ajoute dans une ſomme les deux grandeurs qui ſont après le ſigne radical, & l'on retranche de cette ſomme deux fois la racine du produit de ces deux grandeurs ; & la racine de ce qui reſte, eſt la difference ou le reſte qu'on cherche.

Pour retrancher $\sqrt{48}$ de $\sqrt{75}$, j'ajoute dans une ſomme 75 & 48 ; & j'ai 123, dont je retranche 120, c'eſt-à-dire deux fois 60, qui eſt la racine de 3600 produit de 75 par 48. Il reſte 3, dont la racine, ſavoir $\sqrt{3}$, eſt la difference ou le reſte que l'on cherche.

Le nombre 75 ſoit nommé xx. & 48 ſoit nommé zz, en retranchant $\sqrt{zz}$ de $\sqrt{xx}$, le reſte eſt $x-z$. Ainſi il faut démontrer que $x-z=\sqrt{3}$. Le quarré de $x-z$ eſt $xx-2xz+zz$. lequel eſt égal à 75 plus 48, moins deux fois le produit de la racine du produit de 75 & de 48, laquelle eſt 60. Ainſi $xx-2xz+zz=75-$

120

120 + 48. Or de 75 + 48, c'eſt-à-dire de 123 ayant retranché 120, le reſte eſt 3. Donc $xx - 2xz + zz = 3$. Donc $\sqrt{xx - 2xz + zz}$, ou $x - z = \sqrt{3}$: ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION VINGTIEME.

Problême ſixieme.

44 *Multiplier deux Racines ſourdes.*

1°. Si ces deux racines ſont les mêmes, il ne faut qu'ôter à l'une le ſigne radical. Quand on multiplie $\sqrt{5}$ par $\sqrt{5}$, on cherche un quarré dont $\sqrt{5}$ marque la racine, par conſéquent ce quarré eſt 5.

2°. En général les racines ayant été réduites au même nom, il faut multiplier les grandeurs dont les racines ſont propoſées, les unes par les autres, la racine de ce produit ſera celui des racines, ce qui eſt évident: car ſoient ces deux grandeurs xx & zz, leur produit eſt $xxzz$ dont la racine quarrée eſt xz, produit de x & de z les deux racines de xx & de zz. S'il faut donc multiplier la racine $\sqrt{15}$ par $\sqrt{6}$, je multiplie 15 par 6, ce qui fait 90, dont la racine quarrée eſt égale à la racine de 15 multipliée par celle de 6.

S'il faut multiplier $\sqrt{ab}$ par $\sqrt{cd}$, le produit ſera $\sqrt{abcd}$.

Lorſque les racines ſont réduites à leurs plus petits termes, on multiplie ce qui précéde le ſigne radical de l'un par ce qui précéde celui de l'autre, & ce qui le ſuit par ce qui le ſuit; en conſervant le même ſigne $\sqrt{}$ entre deux; ainſi $3\sqrt{2}$ par $5\sqrt{3}$ donnent pour produit $15\sqrt{6}$.

Mais lorſque ces racines ſont communicantes, il ſuffit de multiplier ce qui précéde les ſignes

ſignes l'un par l'autre, & enſuite multiplier ce produit par le diviſeur commun qui eſt ſous le ſigne ; ainſi pour multiplier $5\sqrt{3}$ par $3\sqrt{3}$, je multiplie 5 par 3 qui précédent les ſignes, & le produit 15 par 3 qui eſt le diviſeur commun ſous le ſigne $\sqrt{}$, ce dernier produit 45 eſt le cherché, car ces deux racines $5\sqrt{3}$ & $3\sqrt{3}$, étant conſidérées comme réduites à leurs plus ſimples expreſſions & non communicantes, leur multiplication auroit donné pour produit $15\sqrt{9}$. Or 9 étant un nombre quarré dont 3 eſt la racine ; ce ſigne $15\sqrt{9}$, marque que 15 eſt multiplié par 3, ce qui fait 45. On trouve ainſi que le produit de $\sqrt{27}$ par $\sqrt{75}$, dont $3\sqrt{3}$ & $5\sqrt{3}$ ſont expoſant eſt 45.

COROLLAIRE.

On peut connoître le produit de deux ſecondes racines ſourdes, lors que les grandeurs dont elles ſont les racines étant multipliées l'une par l'autre, produiſent un nombre quarré. 45

Ces racines ſourdes $\sqrt{2}$ & $\sqrt{50}$ étant multipliées l'une par l'autre, elles produiſent le nombre quarré 100, dont la racine eſt 10 ; qui étant égale au produit des racines de 2 & de 50, on connoît le produit de ces racines.

Cela eſt admirable, qu'on ne puiſſe point connoître deux grandeurs, & qu'on puiſſe démontrer la valeur de leur produit, & même quelle raiſon elles ont entre elles ; car ces deux racines étant données $\sqrt{2}$ *&* $\sqrt{18}$. *je ſai que leur produit eſt* $\sqrt{36}$, *c'eſt-à-dire* 6 ; *& comme elles ſont* communicantes, *je ſai encore que* $\sqrt{2}$ *eſt à* $\sqrt{18}$ *comme* 1 *eſt à* 3, *puiſque* $\sqrt{2} = 1\sqrt{2}$ *&* $\sqrt{18}$ *eſt = à* $3\sqrt{2}$.

PRO-

Proposition Vingt-unieme.
Problême septieme.

46 *Diviſer une racine ſourde par une autre racine ſourde.*

La diviſion défait ce qu'a fait la multiplication : ſi $\sqrt{2}$ multipliant $\sqrt{50}$ fait $\sqrt{100}$, qui eſt la racine du produit de 2 par 50 ; donc pour diviſer $\sqrt{10}$ par $\sqrt{50}$, il faut diviſer 100 par 50, la racine du quotient de cette diviſion, c'eſt-à-dire $\sqrt{2}$, ſera la racine cherchée.

Ainſi pour diviſer $\sqrt{aaab - abbb}$ par $\sqrt{aa - bb}$, il faut ſimplement diviſer $aaab - abbb$ par $aa - bb$, de laquelle diviſion le quotient eſt ab ; la racine de ce quotient ab eſt ce qu'on cherche.

Que ſi les racines ſont réduites à leurs plus petites expreſſions, on diviſe ce qui précéde le ſigne par ce qui précéde le ſigne du diviſeur, & ce qui le ſuit par ce qui le ſuit, en conſervant le même ſigne $\sqrt{}$ entre les deux expoſans : ainſi $15\sqrt{6}$ diviſées par $3\sqrt{2}$ donnent $5\sqrt{3}$.

Mais lorſque ces racines ſont communicantes, on n'a de beſoin que de diviſer ce qui précéde le ſigne, & l'expoſant eſt ce qu'on cherche ; ainſi $15\sqrt{3}$ diviſées par $3\sqrt{3}$, l'expoſant eſt 5, ce qui eſt évident, la diviſion défaiſant ce qu'a fait la multiplication.

Et comme il n'arrive pas toujours que ces diviſions ſoient ſans fractions, on ſe contente ſouvent de ſéparer les deux grandeurs écrites l'une ſur l'autre par une ligne en forme de fraction ; ainſi $\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{7}}$ $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{cd}}$ $\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$.

CHA-

CHAPITRE III.

Des Binomes & Multinomes.

DEFINITIONS.

PREMIERE DEFINITION.

47 *LA somme de deux grandeurs incommensurables entre elles se nomme* Binome.

Ainsi cette grandeur $a+\sqrt{b}$ est un Binome, si la racine $\sqrt{b}$ est incommensurable avec la grandeur a.

SECONDE DEFINITION.

48 *La difference de deux grandeurs incommensurables entre elles, s'appelle* Apotome *ou* Résidu.

On dit par exemple que $a-\sqrt{b}$ est un Apotome. Les Apotomes se nomment aussi *Binomes*.

TROISIEME DEFINITION.

49 *Une grandeur composée de plusieurs grandeurs incommensurables entre elles, est nommée* Multinome.

La grandeur $a-\sqrt{b}+\sqrt{c}$ est multinome, si ces trois grandeurs sont incommensurables entre elles.

Euclide distingue plusieurs sortes de Binomes à qui il donne differens noms, dont il n'est pas fort nécessaire de charger sa mémoire.

De l'Addition & Soustraction des Binomes & Multinomes.

50 L'Addition & la Soustraction de ces grandeurs n'ont

n'ont rien de particulier. Pour ajouter $30-4\sqrt{5}$ & $8\sqrt{12}-4\sqrt{5}$, j'écris $30-4\sqrt{5}+8\sqrt{12}-4\sqrt{5}$: & pour retrancher $8\sqrt{12}-4\sqrt{5}$ de $30-4\sqrt{5}$, j'écris $30-4\sqrt{5}-8\sqrt{12}+4\sqrt{5}$.

De la Multiplication des Binomes & des Multinomes.

51 Elle se fait comme celle des grandeurs complexes. Pour multiplier $a+\sqrt{d}$ par $f+\sqrt{b}$, je multiplie premierement $a+\sqrt{d}$ par f, ce qui fait $af+f\sqrt{d}$; ensuite je multiplie $a+\sqrt{d}$ par $\sqrt{b}$, ce qui fait $a\sqrt{b}+\sqrt{bd}$, j'ajoute les deux produits en un $af+f\sqrt{d}+a\sqrt{b}+\sqrt{bd}$, qui est celui que l'on cherchoit.

Autre Exemple.

Pour multiplier $6+2\sqrt{5}$ par lui-même, je multiplie 6 par 6 ce qui fait 36, & $2\sqrt{5}$ encore par 6, ce qui fait $12\sqrt{5}$; ensuite je multiplie 6 par $2\sqrt{5}$, ce qui fait $12\sqrt{5}$, & $2\sqrt{5}$ par $2\sqrt{5}$, de laquelle multiplication le produit est 20, car le produit de $\sqrt{5}$ par $\sqrt{5}$ c'est 5, qui est le quarré de $\sqrt{5}$. Donc en multipliant $\sqrt{5}$ par $\sqrt{5}$, on fait déja 5. Le produit des nombres 2 & 2 qui sont devant le signe radical $\sqrt{5}$, est 4. Ainsi comme il faut concevoir qu'on multiplie par 4 le produit de $\sqrt{5}$ par $\sqrt{5}$, savoir 5, ce qui fait 20; l'entier produit de toute cette multiplication est $36+12\sqrt{5}+12\sqrt{5}+20$, ou ce qui est la même chose, $56+24\sqrt{5}$.

De la division des Binomes & des Multinomes.

52 Elle se fait comme celle des grandeurs complexes, mettant le Binome à diviser sur le Binome qui est le diviseur. Mais il n'en est pas comme des grandeurs ordinaires dont la division se fait

fait facilement, ou dont les diviſions s'expriment nettement, parce qu'on peut effacer les mêmes lettres qui ſe trouvent dans le diviſeur, & la grandeur qui eſt à diviſer, comme en diviſant *ab* par *b* on n'écrit que *a*. Néanmoins on peut appliquer aux Binomes & aux Multinomes ce qu'on a dit des incommenſurables, dont on a vu que les diviſions en certains cas ſe pouvoient exprimer d'une maniere fort ſimple. Pluſieurs ont tâché de trouver d'autres Règles. Il eſt bon de tenter; mais on ſe trompe facilement quand on prétend faire une Règle générale de ce qui ne ſe rencontre que dans un exemple particulier.

De la réſolution des Puiſſances des Binomes.

Cette réſolution pour l'ordinaire eſt impoſſi- 53
ble. Juſqu'à préſent l'on n'a pu trouver de Règles certaines & générales pour extraire toutes ſortes de racines de ces grandeurs. Voici la Règle que l'on donne pour extraire les racines quarrées des Binomes.

1°. On retranche le quarré de la petite partie du quarré de la grande, & on tire la racine du reſte.

2°. On ajoute cette racine à la grande partie, ce qui fait une ſomme, & on la retranche de la même partie, ce qui fait une difference.

3°. On tire la racine de la moitié de la ſomme, & la racine de la moitié de la différence, enſuite on prend la ſomme de ces deux racines, ſi chaque partie du Binome a le ſigne +, ou bien on prend leur difference ſi une partie a + & l'autre −, & l'on a la racine que l'on cherche. Ainſi pour tirer la racine quarrée de ce Binome $aa + bc + 2a\sqrt{bc}$, 1°. je retranche $4aabc$, qui eſt le quarré de la plus petite partie, de $a^4 + 2aabc$

$+ bbcc$, qui eſt le quarré de la plus grande partie ; le reſte eſt $a^4 - 2aabc + bbcc$, dont la racine quarrée $aa - b$, étant ajoutée à la plus grande partie $aa + bc$, & en étant ôtée, elle fait cette ſomme $2aa$, & cette difference $2bc$, dont les moitiez ſont aa & bc, dont les racines quarrées ſont a & $\sqrt{bc}$, leſquelles étant jointes par le ſigne $+$ elles ſont $a + \sqrt{bc}$, qui eſt la racine que l'on cherche ; car ſi l'on multiplie cette racine $+ \sqrt{bc}$ par elle-même, le produit de cette multiplication qui eſt le quarré de cette raiſon, ſera $aa + bc + 2a\sqrt{bc}$, qui eſt le Binome dont on cherchoit la racine : Donc $a + \sqrt{bc}$ eſt la racine que l'on cherchoit.

Pour tirer la racine cubique de $45 + 29\sqrt{2}$, ôtez 2 de 29, à cauſe que 2 eſt ſous le ſigne $\sqrt{}$, reſte 27, prenez-en le tiers 9, dont la racine 3. jointe avec $\sqrt{2}$. ou $3 + \sqrt{2} = \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}}$ & $3 - \sqrt{2} = \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$, car il faut garder le même ſigne de la partie commenſurable. Si vous formez le cube de $3 + \sqrt{2}$, ou plutôt le cube de $a + \sqrt{b}$, & que vous en remarquiez les parties, vous verrez bien la démonſtration de la Règle, & les eſpeces où elle doit réuſſir.

ELE-

ELEMENS
DES
MATHEMATIQUES,
OU
TRAITÉ
DE LA GRANDEUR
EN GENERAL.

LIVRE SEPTIEME.

De la Méthode de réſoudre une Queſtion ou Problême.

CHAPITRE PREMIER.

Il y a deux differentes Méthodes de réſoudre une Queſtion ou Problême, qui ſont la Syntheſe & l'Analyſe. *Dans celle-ci on ſuppoſe les choſes telles qu'elles le doivent être, ſelon que la Queſtion eſt propoſée. Comment cela ſe peut faire.*

ON nomme *Queſtion* la propoſition ou la recherche d'une vérité qui eſt inconnue, mais dont on connoit quelque rapport avec des vérités connues. On ne cherche point ce qu'on 1

connoit : ce ſeroit auſſi en vain qu'on chercheroit ce qu'on ignore, ſi on n'en avoit quelque connoiſſance ; auſſi dans une Queſtion tout n'eſt pas inconnu. Or c'eſt de ce qu'on ſait déja, qu'on peut apprendre ce qu'on ne ſavoit point : une premiere connoiſſance ſervant de degré pour en acquerir de nouvelles. Pour cela il faut ſe ſervir de l'une ou de l'autre de ces deux méthodes, que l'exemple ſuivant fera comprendre. Suppoſons un homme qui veut connoître les reſſorts d'une montre, qui n'en a jamais vu d'ouverte, & de démontée. Si cette montre étoit dans ſa boëte, & qu'ainſi il ne vît point ce qui la fait marcher, il ſeroit porté à l'ouvrir & à la démonter pour en voir le dedans ; ce ſeroit la premiere méthode qu'il ſuivroit. Si cette montre étoit démontée, & que toutes ces pieces fuſſent ſéparées, il ſouhaiteroit de trouver un Artiſan habile qui pût les aſſembler, & lui en expliquer l'uſage. La premiere de ces méthodes s'appelle *Analyſe*, c'eſt à-dire Méthode de réſolution, parce qu'on réſout en ſes parties la choſe qu'on veut connoître. La ſeconde méthode s'appelle *Synthèſe*, ou Méthode de compoſition, parce qu'on aſſemble les parties de la choſe qu'on examine. La premiere défait, la ſeconde compoſe. C'eſt en ſuivant l'une ou l'autre méthode, que l'on peut réſoudre une Queſtion.

Il ne faut point s'attacher ſcrupuleuſement à l'étymologie des noms : il faut voir ce qu'ils ſignifient dans l'uſage préſent. Par la *Synthèſe* on entend la méthode de réſoudre une Queſtion par les principes de la Science que cette Queſtion regarde : comme pour réſoudre les Théorêmes & les Problêmes que nous avons propoſez dans les ſix premiers Livres, vous avez vu en

en chaque Livre que nous nous sommes servis de ce que nous avions démontré précédemment, & qu'ainsi nous avons composé comme un Corps de doctrine qui comprend toutes les vérités principales que doit renfermer un Traité de la Grandeur en général. Ainsi il n'est pas nécessaire de parler plus au long de la *Synthese*. Cet Ouvrage, si on en est content, peut servir de modele de ce qu'on doit faire lors qu'on l'employe. On l'appelle *Méthode de Doctrine*, parce qu'elle est propre pour enseigner. Un Maitre qui sait déja les choses, ne propose d'abord à son Disciple que celles qui sont faciles à comprendre, le menant par degré de connoissance en connoissance, selon que les vérités qu'il enseigne se suivent, ou que les unes servent à faire comprendre les autres; car comme elles lui sont toutes connues, il les peut ranger comme il lui plait. C'est ainsi que j'ai rangé les parties de ce Traité, après avoir bien connu moi-même ce que j'avois dessein de faire connoitre. Il n'en est pas de même de l'*Analyse*. On ne l'employe pas pour faire connoitre ce que l'on sait, mais pour trouver ce qu'on ne savoit pas; c'est pour cela qu'on l'appelle *Méthode d'invention*; & c'est cette Méthode à laquelle j'ai destiné ce septieme Livre. Ce mot *Analyse* se peut traduire en François *Résolution*. Mais encore une fois, ne nous arrêtons pas à ce que signifie ce mot, tâchons d'en avoir une notion si claire selon qu'on l'entend aujourd'hui, que nous puissions déduire de cette notion ce qu'on doit faire lors qu'on se sert de cette méthode.

Un Problême étant proposé lors qu'on suppose d'abord la chose faite comme elle le doit être, & que de ce qui est connu dans la Question

on en tire la connoiſſance de ce qu'on ne ſavoit pas, c'eſt cela qu'on appelle *Analyſe* ou *Méthode d'invention*; parce qu'avec ſon ſecours on découvre & on vient à connoitre ce qu'on ne connoiſſoit pas auparavant; au lieu que dans la *Syntheſe* on ne peut enſeigner & on n'enſeigne effectivement aux autres que ce qu'on ſait déja.

Ainſi la notion que nous venons de donner de l'Analyſe nous apprend, que la premiere choſe qu'on doit faire c'eſt d'exprimer nettement ce qui eſt propoſé, afin de le conſiderer attentivement, puiſque de la ſeule ſuppoſition qu'on fait que la choſe dont il s'agit eſt faite d'une telle maniere, on doit déduire tout ce qu'on en veut ſavoir. Pour être entendu, ſervons-nous d'un exemple. On propoſe de découvrir les âges de trois perſonnes. *Le ſecond eſt*, dit-on, *plus vieux que le premier de cinq ans; le troiſieme a le double des années du premier & du ſecond; & les âges de ces trois perſonnes ſont enſemble 75 années.* Si je nomme donc x l'âge du premier; celui du ſecond ſera $x+5$; & puis que l'âge du troiſieme eſt le double de l'âge du premier & du ſecond, donc ſon âge ſera $4x+10$. Ainſi ces trois âges ſont x. $x+5$. $4x+10$. Or ils ſont égaux à 75; donc $6x+15=75$. On a ainſi exprimé le Problême propoſé tel qu'il eſt. C'eſt de cette ſeule ſuppoſition qu'il faut déduire la verité qu'on cherche, c'eſt-à-dire quel eſt l'âge de chacun.

CHA-

CHAPITRE II.

L'Analyſe impoſe les choſes faites comme on les propoſe dans une Queſtion, & par le moyen de ce qu'on y connoit elle égale les grandeurs inconnues à celles qui ſont connues, ce qui s'appelle trouver des Equations. Règles pour cela.

PREMIERE REGLE.

1 *LA premiere choſe que l'on doit faire eſt de concevoir très-diſtinctement l'état de la Queſtion qu'on propoſe de réſoudre : c'eſt-à-dire, ce qu'il faut chercher pour ſatisfaire à la Queſtion.*

Une Queſtion eſt preſque réſolue quand on ſait bien ce qu'il faut chercher ; ce qui paroîtra plus clairement dans un exemple. On propoſe à un homme qui ne ſait pas la Langue de la Chine de faire un Recueil de pluſieurs mots, entre leſquels ſe trouvent écrits les termes de cette Langue, ſans le ſecours d'aucun Livre ni d'aucun Maitre. Cette queſtion paroît d'abord impoſſible ; néanmoins quand on y fait bien attention, on apperçoit que pour ſatisfaire à ce Problême, il n'eſt queſtion que de trouver par l'art des combinaiſons tous les mots poſſibles que l'on peut faire de toutes les lettres de l'Alphabet ; car entre ces mots tous les termes de la Langue de la Chine s'y trouveront néceſſairement. On parlera des combinaiſons dans la ſuite.

SECONDE REGLE.

3 *Pour découvrir quel eſt l'état de la Queſtion, il faut retrancher ce qu'il n'eſt point néceſſaire d'examiner pour arriver à la connoiſſance de la vérité*

que l'on cherche, & suppléer les choses qui sont nécessaires.

Ceux qui proposent des Questions y joignent quelquefois des conditions qui semblent nécessaires, quoi qu'elles ne le soient pas. Comme dans cette Question : *J'ai vu*, dit-on, *des Chasseurs, ou plutôt des Pêcheurs, qui emportoient avec eux ce qu'ils ne prenoient pas, & qui jettoient dans l'eau ce qu'ils prenoient.* L'esprit étant préoccupé de l'idée de Pêcheurs qui pêchent du poisson, il ne peut concevoir ce que l'on veut dire ; & toute la difficulté qu'il y a pour résoudre cette Question, vient de ce qu'on ne pense pas que des Chasseurs & des Pêcheurs, aussi-bien que d'autres hommes, cherchent quelquefois dans leurs habits certains petits animaux qu'ils jettent s'ils les attrapent, & qu'ils emportent avec eux s'ils ne peuvent les attraper. Ainsi il n'étoit point nécessaire de parler dans cette Question de Chasseurs ni de Pêcheurs.

Quelquefois aussi on ne met pas dans une Question tout ce qui est nécessaire, comme dans celle-ci. *Rendre un homme immobile sans le lier : c'est-à dire lui faisant mettre seulement son petit doigt dans son oreille, le rendre par cette posture comme immobile en sorte qu'il ne puisse sortir du lieu où on l'aura mis jusques à ce qu'il ôte son petit doigt de son oreille.* La condition que l'on ne dit pas, est que l'on doit faire embrasser un arbre à celui qui met son petit doigt dans son oreille, en sorte que cet arbre soit enfermé entre son bras & son oreille. Cette condition étant mise, il n'y a plus de Question.

Troiseme Regle.

4 *Or quand on a retranché d'une Question tout ce qui*

qui ne servoit qu'à la rendre plus embaraſſée, & que l'on a ſuppléé les conditions néceſſaires que l'on ne diſoit pas, & qu'ainſi on voit clairement ce qu'il faut chercher; pour ſoulager l'eſprit dans cette recherche, il faut donner un nom à chaque terme de la Queſtion, & l'exprimer par un caractere ſur le papier.

Cela arrête l'imagination & empêche que l'on ne s'embrouille, & que l'on n'oublie les découvertes que l'on a faites. Ainſi dans la queſtion que l'on a fait ci-deſſus des âges de trois perſonnes differentes, pour fixer mon eſprit j'appelle x l'âge du premier, z celui du ſecond, & y celui du troiſieme. Ces caracteres me rendent plus facile l'attention que je dois donner à cette Queſtion; & quand j'aurai fait quelque découverte, je la marquerai pour ne la pas oublier. Par exemple, connoiſſant par la propoſition qui a été faite de la préſente Queſtion, que l'âge de la premiere perſonne que j'ai nommée x, eſt moindre de cinq années que l'âge de la ſeconde qui eſt marqué par la lettre z, je découvre que x plus cinq années eſt égal à z; ce que je marque de cette maniere $x+5=z$. Et enſuite je continue l'examen de cette Queſtion, donnant à chaque choſe mon eſprit tout entier, parce que je ne ſuis point obligé de conſerver dans ma mémoire ma premiere découverte, l'ayant laiſſée comme en dépôt ſur le papier.

QUATRIEME REGLE.

En marquant par des ſignes les grandeurs qui ſont le ſujet de la Queſtion, il faut diſtinguer par des ſignes differens celles qui ſont connues d'avec celles qui ne le ſont pas.

Si tout étoit connu dans une Queſtion, ce ne

ſeroit pas une Queſtion, comme on l'a remarqué. On ne s'aviſe pas de demander ſérieuſement quelle eſt la grandeur qui eſt la moitié de 24, & qui eſt égale à 12. Si tout étoit inconnu, ce ne ſeroit pas auſſi un ſujet de Queſtion. Si un homme me propoſoit ſimplement de découvrir quel nombre il a penſé, ſans me dire autre choſe, je lui répondrois que je ne ſuis pas Devin. Dans une Queſtion raiſonnable il y a toujours quelque grandeur connue, qui ſe trouve mêlée avec des grandeurs inconnues: il les faut diſtinguer; ce qu'on peut faire, marquant celles qui ſont connues avec les premieres lettres de l'alphabet a, b, c, d, & ſe ſervant des dernieres lettres x, y, z, pour marquer les inconnues. Cela ſoulage encore l'imagination, & fait appercevoir ſenſiblement ce qu'il faut chercher dans une Queſtion. C'eſt toujours la valeur de x, ou de z, ou de y, que l'on cherche.

Quand dans la Queſtion propoſée l'on y parle de pluſieurs grandeurs de differentes eſpeces, on peut les marquer avec les premieres lettres de leur nom. Si l'on parloit par exemple de piſtoles, d'écus, de ſols, on pourroit appeller les écus e, les piſtoles p, les ſols f. Tout cela ſert merveilleuſement à faciliter la réſolution d'une Queſtion, aidant l'imagination, ſans le ſecours de laquelle la plupart des hommes ne peuvent rien concevoir. Outre que cela abrege fort le diſcours, ſans le rendre néanmoins obſcur, parce que ces ſignes ſont ſimples & faciles à connoître. Je ſuppoſe qu'on les réduit à un petit nombre; car autrement, bien loin de rendre le diſcours clair en l'abregeant, ils l'obſcurciroient, comme l'experience le fait con-

connoître, en ce qu'ils composeroient un langage tout nouveau auquel l'on n'est point accoutumé.

Cinquieme Regle.

Quand une Question n'est point déterminée par quelque grandeur particuliere, de sorte que plusieurs grandeurs peuvent avoir les conditions requises, il faut alors supposer à discretion quelque grandeur qui ait les conditions proposées, & détermine ainsi la Question. 6

Si on proposoit de trouver en général une grandeur qui fût la sixieme partie d'une autre grandeur, cette Question seroit indéterminée; car l'on peut trouver une infinité de differentes grandeurs qui seront la sixieme partie d'une autre grandeur. Je prends donc 30 que je divise par 6, le quotient de cette division qui est 5, est la sixieme partie d'une grandeur. Je puis supposer une autre grandeur comme est 24, dont la sixieme partie est 4; ainsi ces deux nombres 24 & 4 satisfont à la Question, comme font 30 & 5.

Sixieme Regle.

Il faut corriger les noms ou les expressions des grandeurs qui sont le sujet de la Question, & les réduire aux plus simples termes qu'il se pourra faire. 7

C'est-à-dire que les expressions dont on se sert doivent être nettes & abregées, afin qu'on ait moins de peine à se les représenter, & qu'ainsi on puisse plus aisément achever de résoudre la Question; au lieu donc de $x + 5 + x + x + 10$, on doit écrire $3x + 15$. De même lorsqu'on a des fractions il faut les

réduire aux plus simples termes; au lieu de $\frac{12}{24}$ écrire $\frac{1}{2}$; & si on a plusieurs fractions les ajouter en une somme. Par conséquent si $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ sont la valeur d'une grandeur donnée, il faut ajouter ces deux fractions, & mettre en leur place leur valeur $\frac{5}{6}$.

Pour épargner la diversité des signes, au lieu de deux grandeurs connues, il en faut mettre une seule qui leur soit égale; ainsi au lieu de $ax + dx$, prendre c qui soit égale à $a + d$, & écrire cx. De la même maniere si la grandeur donnée est $\frac{dx}{3}$, c'est-à-dire le tiers de dx; je prends une grandeur que je nomme f, qui soit le tiers de d, & au lieu de $\frac{dx}{3}$ j'écris fx, car fx est le tiers de dx. Ces expressions plus simples & moins embarassées rendent la question plus claire.

Septieme Regle.

8 *Connoissant les rapports qui sont entre les termes d'une Question, on connoit la difference qui est entre ces termes, & ce qui les rend égaux ou inégaux; par ce moyen on peut les exprimer en deux manieres; ce qui s'appelle faire une Equation.*

Pour demeurer dans la même Question des trois âges qui a été proposée ci-dessus, connoissant que z surpasse x de 5, ou que la difference de x & de z est 5, je sai donc que $z - 5 = x$, ou que $x + 5 = z$: & puis que y est le double de x & z, qu'il faut que $2x + 2z$ soit égal à y. Ainsi je puis exprimer ces grandeurs en deux manieres, nommer $x + 5$ la grandeur z, & $2x + 2z$ la grandeur y: c'est cette double expression qui s'appelle *Equation*. Remarquez que j'ai examiné cette Question comme si tout étoit fait.

fait. J'ai donné des noms aux choſes, comme ſi je les connoiſſois; après quoi j'ai conſideré leurs differences; j'ai, dis-je, parcouru la difficulté ſelon l'ordre qui montre le plus naturellement leurs rapports, ce qui m'a fait trouver le moyen d'exprimer une même grandeur en deux façons; & cela, comme nous l'avons dit, s'appelle avoir une *Equation*. J'ai trouvé que $x + 5 = z$ & $2x + 2z = y$.

Huitieme Regle.

Il faut trouver autant d'Equations qu'il y a de grandeurs inconnues, & faire en ſorte que dans l'expreſſion du Problême il n'y ait qu'une ſeule grandeur inconnue. 9

Il eſt évident que la fin de tout ce que l'on fait dans l'examen d'une queſtion, c'eſt en comparant les grandeurs inconnues avec celles qui ſont connues, de connoître, ſi cela ſe peut, ce qui les rend inégales; ou ce qu'il faudroit ajouter ou retrancher plus ou moins, afin qu'elles fuſſent égales. Ainſi ayant examiné toutes les conditions d'un Problême, il faut trouver autant d'Equations qu'il y a de grandeurs inconnues; de ſorte qu'il n'en reſte qu'une ſeule inconnue, c'eſt-à-dire que de toutes les lettres qui marquent des grandeurs inconnues, il ne doit reſter qu'une ſeule lettre qui ſoit inconnue. Par exemple, dans la Queſtion ci-deſſus propoſée, puiſque je ſai que $x + 5$ eſt égal à z, qui eſt le ſecond âge, je n'appelle plus ce ſecond âge z, mais $x + 5$, & puis que le troiſieme âge y eſt le double de x & de $x + 5$, je n'appelle plus y le troiſieme âge, qui $2x + 2z$, mais $2x + 2x + 10$; laquelle expreſſion $2x + 2x + 10$ étant corrigée, ſe réduit à cel-

le-ci $4x+10$; ainsi les trois grandeurs x, z, y étant réduites à celle-ci x. $x+5$. $4x+10$, elles n'ont qu'une de ces lettres qui marquent les inconnues, savoir x. Cela rend la Question bien plus simple, la réduisant à la recherche d'une seule grandeur inconnue. Dans l'exemple proposé il n'est plus question que de chercher la valeur de x, qu'on trouve après facilement, comme nous le verrons dans la suite. Mais puisque la somme des trois âges $x+x+5+4x+10$ est égale à 75; donc après avoir corrigé cette expression & l'avoir réduite à celle-ci $6x+15$, qui est plus simple, j'ai cette Equation $6x+15=75$. c'est-à dire une double expression de la même grandeur, car $6x+15$ & 75 ont une même valeur.

Neuvieme Regle.

10 *Quand les grandeurs connues ou inconnues se trouvent mêlées ensemble, il faut les séparer, & transporter d'un côté ce qui est tout connu, & de l'autre ce qui est inconnu.*

On appelle *membre* d'une Equation ce qui est de part & d'autre du signe de l'égalité; ainsi $6x+15$ & 75 sont les membres de cette équation $6x+15=75$. Or quand dans l'un des membres d'une Equation la grandeur inconnue se trouve toute seule, & que dans l'autre membre il n'y a que des grandeurs connues, il est évident que cette grandeur n'est plus inconnue. Si $x=10$, je sai que la valeur de x est 10. Pour achever donc la Question, il faut faire passer dans l'un des membres tout ce qui est connu, & dans l'autre tout ce qui est inconnu, de maniere que le rapport de la grandeur inconnue avec les grandeurs connues soit net. Par exem-

ple

ple, dans cette Equation $6x + 15 = 75$, la grandeur x se trouvant mêlée avec $+ 15$, je rejette cette grandeur connue 15 de l'autre côté de cette maniere $6x = 75 - 15$, ce que je fais en retranchant de chaque membre cette grandeur 15, & cela ne trouble point l'Equation, puis que de deux choses qui sont égales si on en retranche choses égales, elles demeurent égales.

Dixieme Regle.

Il faut réduire aux plus simples termes cette raison ou rapport d'égalité qui est entre les deux membres de l'Equation. II.

Ainsi au lieu de $6x = 75 - 15$, j'écris $6x = 60$, car $75 - 15$, c'est la même chose que 60. Je réduis encore cette Equation ou rapport $6x = 60$ à de moindres termes, divisant ces deux termes $6x$ & 60 par 6. Cette division donne x & 10, qui sont encore en même raison, puis que divisant deux grandeurs par un même diviseur, elles gardent entre elles la même raison qu'elles avoient auparavant. Ainsi $x = 10$, après quoi on connoit sensiblement la raison de l'inconnue x avec ce qui est connu. Toute la question se trouve donc résolue; car puisque x vaut 10, que $x + 5 = z$. donc $10 + 5 = z$. donc z vaut 15: & puis que $2x + 2z = y$, donc y vaut 50: Par conséquent le premier âge est 10, le second 15, le troisieme est 50, la somme desquels âges est 75 années.

Ainsi lors qu'on suit la méthode que nous avons prescrite, l'on trouve enfin la résolution de la Question. Ce n'est point par hazard, c'est en suivant une méthode judicieuse & naturelle. Pour marque de cela, c'est que si le Problême ne

ne peut pas être résolu, on en découvre l'impossibilité.

12 Un Problême est impossible, ou absolument, ou par rapport à nos connoissances. Un Problême est absolument impossible lors qu'il renferme une contradiction, comme celui-ci, *Trouver un nombre qui soit le tiers de* 12, *& qui soit égal à* 5 : cela est impossible, car le tiers de 12 est 4. Ainsi l'on demande de trouver un nombre égal en même tems à 4 & à 5, ce qui renferme une contradiction. Or en suivant la méthode prescrite, l'on reconnoît si un Problême est absolument impossible ; car par exemple, dans celui-ci ayant supposé que le tiers de 12 se nomme x, j'ai cette Equation $3x = 12$: & puis que x est égal à 5, il faut que $3x = 15$; ce qui est impossible, car $3x = 12$. Ainsi je connois que les deux conditions qui sont renfermées dans ce Problême se combattent, & que par conséquent ce Problême est impossible.

Nous connoissons aussi si un Problême est impossible par rapport à nos connoissances, car si par exemple après avoir suivi les Règles précédentes, je n'ai pas pu réduire à des termes plus simples une Equation, qu'à ceux-ci, $xx = bb + ax$, j'apperçois bien que je ne puis pas savoir quelle est la valeur de x, parce que je n'ai point encore de Règles pour connoître la valeur d'une grandeur inconnue comme est x, quand je sai seulement que son quarré qui est xx est égal au quarré d'une grandeur connue, tel qu'est bb plus un plan fait de l'inconnue x & d'une grandeur connue, tel qu'est le plan ax.

13 Lors qu'en parcourant la difficulté de la maniere qu'on vient de le dire, on ne trouve point d'E-

d'Equation, c'eſt une marque que la queſtion eſt indéterminée, car le rapport de deux grandeurs déterminées, fait qu'on les peut exprimer en deux manieres. Alors, comme on l'a dit, on ſuppoſe des grandeurs à diſcretion qui puiſſent ſatisfaire à la queſtion.

CHAPITRE III.

De la réduction d'une Equation à une telle expreſſion, que la grandeur inconnue qu'on cherche, ſe trouve ſeule dans un des membres de l'Equation.

L'Analyſe conſiſte principalement à couper & tailler une Equation de ſorte qu'on la réduiſe à une expreſſion ſimple; & qu'on délivre la grandeur inconnue de ce qui empêchoit qu'on ne vît préciſément ſon rapport avec les grandeurs connues. Comme dans cette Equation $5x-1=4x+6$ en ajoutant 1 de part & d'autre, $5x=5x+7$, & ôtant $4x$ de part & d'autre, on a $x=7$, où le même rapport d'égalité ſubſiſte. C'eſt ce qui a fait donner le nom d'Analyſe à la méthode dont nous parlons. C'eſt un mot Grec qui ſignifie réſoudre, couper, délier. Ces réductions ſe font ajoutant aux membres d'une Equation, ou en retranchant quelque choſe, les multipliant ou les diviſant de maniere que l'égalité qui eſt entre eux ne ſoit point ôtée.

Des Réductions qui ſe font par Addition.

Si de part & d'autre du ſigne de l'égalité on ajoute des grandeurs égales, les membres de l'Equation de- 14

demeureront égaux, & l'Equation ne ſera point troublée.

Si à des grandeurs égales on en ajoute d'égales, elles demeurent égales entre elles. Ainſi ſi $x=15$, & qu'on ajoute 5 de part & d'autre, l'Equation reſte $x+5=20$. Pour ajouter il ſuffit d'effacer d'un membre d'une Equation ce qui s'y trouve avec le ſigne $-$ & l'écrivant dans l'autre avec le ſigne $+$. Alors l'on ajoute également à l'un & à l'autre membre. Soit cette Equation $x-50=6$. Pour ajouter 50 de part & d'autre, j'efface 50 qui eſt dans le premier membre avec $-$, & je le mets dans l'autre membre avec le ſigne $+$ de cette maniere, $x=6+50$; ce qui n'eſt qu'une expreſſion corrigée & abregée de l'addition que je fais; car ſi $x-50=6$, il eſt certain que $x-50+50=6+50$. Or puis que $-50+50=0$, pour faire cette addition d'une maniere nette, il faut ſeulement écrire $x=6+50$, ou $x=56$. Ainſi ſi $a=z+0$, pour ajouter z à l'un & à l'autre membre, j'écris $a=0+z$, ou ſimplement $a=z$, puis que ce zero n'augmente point dans ce lieu la valeur z. Si on a cette Equation $a-2x=6+x$; en tranſportant $-2x$ dans l'autre membre & l'écrivant avec $+$, on a cette Equation $a=6+x+2x$, ou $a=6+3x$.

Des Réductions qui ſe font par la Souſtraction.

15 *Si de part & d'autre du ſigne de l'égalité on retranche des grandeurs égales, l'Equation n'eſt point troublée.*

De choſes égales ôtant choſes égales, elles demeurent égales entre elles : Ainſi ſi $x+5=20$,

$5x = 20$, retranchant 5 de part & d'autre, l'Equation reste $x = 15$. Si $a = 6 + 3x$, ôtant 6 de part & d'autre, reste $a - 6 = 3x$. Or pour faire ce retranchement il suffit d'effacer d'un nombre ce qui s'y trouve avec le signe $+$, & de l'écrire dans l'autre avec le signe $-$. Car pour-lors l'on retranche également de l'un & de l'autre membre de l'Equation, & l'on ne fait qu'abreger l'opération ; car si $x + 50 = 80$, il est évident que $x + 50 - 50 = 80 - 50$. Or puis que $+ 50 - 50$ ne fait rien, pour retrancher 50 de part & d'autre, il ne faut qu'écrire $x = 80 - 50$, ou $x = 30$.

Des Réductions qui se font par la Multiplication.

Lors que l'on multiplie les deux membres d'une Equation par un même multiplicateur, l'on ne trouble point cette Equation. 16

En multipliant les deux termes d'une raison par une même grandeur, les produits sont en même raison que les grandeurs multipliées. Ainsi si l'on multiplie les deux membres de cette Equation $\frac{z}{a} = b$ par a, l'on aura cette Equation $z = ba$; car puis que la raison de $\frac{z}{a}$ avec b est une raison d'égalité, la raison de z avec ba qui est la même sera aussi une raison d'égalité. Ainsi si $\frac{x}{3} = 6$, multipliant l'un & l'autre membre par 3, l'on aura $x = 18$.

Si $\frac{zz}{z - b} = a$, puisqu'en effaçant le dénomina-

teur

teur $z-b$ du premier membre, ce membre eſt cenſé être multiplié par $z-b$, en multipliant a par $z-b$, on aura cette réduction $zz=az-ab$. Par la même raiſon ſi $\frac{zz}{a}=\frac{zz-bz+bb}{z}$ pour multiplier ces deux nombres par a, j'efface a du premier, & je multiplie les parties du ſecond par a; & j'ai $zz=\frac{azz-abz-abb}{z}$. En multipliant cette Equation ainſi réduite par z, on a cette Equation encore plus ſimple $z^3=azz-abz+abb$, ſelon le même principe, que pour multiplier une fraction par ſon dénominateur, il ne faut qu'effacer ce dénominateur.

C'eſt ce qui fait connoître que pour délivrer une Equation des fractions quand elle en a, il n'y a qu'à la multiplier par le dénominateur de la fraction. S'il y a des fractions dans les deux membres de l'Equation, il faut faire la même choſe, comme ici $\frac{zz}{a}=\frac{zz-bz+bb}{z}$, je multiplie 1°. l'un & l'autre membre par a, ce qui produit $zz=\frac{azz-abz+abb}{z}$. 2°. Je multiplie l'un & l'autre membre par z, & j'ai $z^3=az^2-abz+abb$. Ainſi il n'y a plus de fraction.

Des Réductions qui ſe font par la Diviſion.

17 *Lors que l'on diviſe les deux membres d'une Equation par la même grandeur, l'Equation demeure.*

Les

Les deux termes d'une raiſon étant diviſez par une même grandeur, les quotiens de ces diviſions ſont en même raiſon que ces deux termes. Si $zz = 4z$ diviſant les deux membres par z, on aura $z = 4$. Si $z^4 = a^3 + bb\,zz$, diviſant cette Equation par zz, ou aura $z^2 = az + bb$. De même ſi $3z = 12$, diviſant par 3 viendra $z = 4$. Si $az = ab$ diviſant par a, on aura $z = b$ Cette Equation $azz + bzz = abz + bbz - abb - b^3$, pouvant être diviſée par $a + b$, on la réduit par cette diviſion à celle-ci $zz = bz - bb$. On doit ici ſe ſouvenir des Règles que nous avons données Liv. I. n. 39. pour diviſer les grandeurs marquées par des lettres.

Des Réductions qui ſe font par l'extraction des Racines, & en abaiſſant une Puiſſance.

En tirant les racines de chaque membre d'une Equation, l'on ne trouble point cette Equation. 18

Cette Règle eſt fondée ſur ce principe, que les puiſſances égales ont des racines égales. Si donc $xx = 25$, en prenant les racines de xx, & de 25, il faut que x racine de xx, & 5 racine de 25, ſoient égales; ainſi $x = 5$. Vous voyez qu'on abaiſſe la puiſſance xx d'un degré. Ainſi ſi $z^3 = 125$, ayant tiré la racine cubique de l'un & l'autre membre, on aura $z = 5$. Ayant de même extrait la racine quarrée de part & d'autre dans cette Equation $zz = aa + 2ab + bb$, elle ſera réduite à celle-ci $z = a + b$.

Des Réductions qui se font en élevant une Puissance à un plus haut degré.

19 *En élevant chaque membre d'une Equation à un plus haut & même degré, l'on ne trouble point cette Equation.*

Car comme les racines des grandeurs égales sont égales, aussi les grandeurs qu'on regarde comme des racines, demeurent égales entre elles si on les éleve à un même degré: ce qui est fort utile pour se délivrer des grandeurs incommensurables; car si j'ai cette Equation $\sqrt{z} = 5$, en élevant ces deux grandeurs à un même degré, c'est-à-dire prenant le quarré de $\sqrt{z}$ qui est z, & celui de 5 qui est 25, je réduis l'Equation $\sqrt{z} = 5$ à celle-ci $z = 25$. Car il est évident que pour quarrer une grandeur qui a le signe radical, il suffit d'ôter ce signe. Le quarré de $\sqrt{xx}$ est xx: celui de $\sqrt{xx+yy}$ est $xx+yy$.

Des Réductions qui se font par la Substitution.

20 Il ne faut pas oublier la réduction qui se fait par la Substitution; c'est-à-dire mettant au lieu d'une grandeur inconnue ou incommode, quelque autre grandeur connue, ou qui facilite la résolution de la question. On en a déja vu des exemples dans le Problême des trois âges; où en la place des grandeurs z & y, on a mis $x+5$ pour z; & $4x+10$, pour y.

Ré-

Réductions par la Transposition.

On peut réduire une Equation de maniere à ce que la grandeur inconnue se trouve seule d'un côté, ce qui se fait en transposant les grandeurs. 1°. Par l'Addition ou par la Soustraction. Car par exemple, si l'Equation donnée est $x-a=b$, on peut transporter a afin que x soit seul, en ajoutant a de part & d'autre; ainsi $x=b+a$. Si la grandeur a eût été jointe avec x par le signe $+$, il auroit fallu retrancher a de côté & d'autre, ce qui eût donné $x=b-a$. On fait aussi cette transposition par la multiplication & par la division, & l'on délivre une grandeur de celle avec qui elle se trouve mêlée. Soit par exemple cette Equation $\frac{x}{3}=b$, pour ôter 3 du premier membre, je multiplie le premier membre $\frac{x}{3}$, & le second qui est b par 3, ce qui me donne cette Equation $x=3b$, dans laquelle x est dégagée de toute autre grandeur. Si l'Equation donnée eût été $3x=b$, en divisant les membres de cette Equation par 3, je l'aurois réduite à celle-ci $x=\frac{b}{3}$, où x se trouve toute seule, & 3 est transporté de l'autre côté.

Ces réductions changent tellement une Equation, qu'on n'en apperçoit ni l'origine ni le progrès, à moins qu'on ne les fasse soi-même. C'est ce qui fait la difficulté des Livres d'Algebre. Voyons-le dans un exemple.

Soit

Soit cette Equation $\sqrt{\frac{zz+3aa}{4}}+\sqrt{\frac{zz-3aa}{4}}=\sqrt{\frac{azz}{b}}$. Les quarrez des grandeurs égales étant égaux, en quarrant les membres de cette Equation, ce qui se fait ôtant les signes radicaux, je l'exprime ainsi. $\frac{zz+3aa}{4}+\frac{zz-3aa}{4}=\frac{azz}{b}$.

$+\frac{3aa}{4}$ & $-\frac{3aa}{4}$ ne font rien, je le supprime donc pour rendre l'expression plus nette ; & puisque $\frac{zz}{4}$ est un quart de zz, en ajoutant une fois cette même grandeur, c'est-à-dire la doublant, ce qui ne valoit qu'un quart vaut la moitié. C'est-à-dire que $\frac{zz}{4}+\frac{zz}{4}$ est égal à $\frac{zz}{2}$. Je réduis donc l'Equation proposée à celle-ci $\frac{zz}{2}=\frac{azz}{b}$; qui est fort differente de sa premiere expression.

CHA-

CHAPITRE IV.

Principes des Equations, ou moyens de trouver de doubles expreſſions qui facilitent la réſolution d'un Problême.

TOutes ces réductions dont nous venons de parler, ſuppoſent qu'on a trouvé des Equations, c'eſt-à-dire de doubles expreſſions des grandeurs dont on cherche la valeur, que la ſeule maniere dont un Problême eſt énoncé fait connoitre: par exemple, ſi on propoſe que z eſt trois fois plus grand que x, je conclus que trois fois x eſt égal à z, qu'ainſi z ſe peut nommer $3x$; j'ai donc une double expreſſion de la même grandeur, & par conſéquent cette Equation $z=3x$. C'eſt ainſi que par les rapports qu'ont entre elles les grandeurs, qui ſont les termes de la Queſtion, on trouve des Equations. Or tout rapport, comme nous avons vu, eſt ou difference, ou raiſon; ainſi pour égaler des grandeurs dont on connoit les rapports, & par conſéquent pour les exprimer en deux manieres, il faut conſiderer leurs differences, ou les raiſons qu'elles ont entre elles.

22

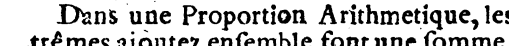
La difference de deux grandeurs eſt l'excès de la plus grande par deſſus la plus petite, ou le défaut de la plus petite au-deſſous de la plus grande. Ainſi en ajoutant cette difference à la plus petite, on l'égale à la plus grande, & en retranchant cette difference de la plus grande, on l'égale à la plus petite. Si la difference de x à z eſt 10; que x ſoit plus petit que z;

donc $x+10=z$, ou $x=z-10$; ce qui me donne de doubles expreſſions des grandeurs x & z. Je puis nommer $x+10$ la grandeur z, & $z-10$ la grandeur x, ſelon que cela me ſera plus commode, & ainſi au lieu de l'une ſubſtituer l'autre, de ſorte que je n'aye qu'une lettre inconnuë.

Dans une ſomme compoſée de deux parties, la difference de cette ſomme à l'une de ſes parties, eſt l'autre partie. Par exemple, ſi a & b ſont les parties de z; la difference de z à a eſt b, & ſa difference à b eſt a; ainſi $z-a=b$, & $z-b=a$.

Dans une Proportion Arithmetique, les extrêmes ajoutez enſemble ſont une ſomme égale à l'addition des moyens. Ainſi ſi $\div a.b.c.d.$ donc $a+d=b+c$.

23 La moitié de la ſomme de deux grandeurs inégales, plus la moitié de la difference de ces grandeurs, eſt égale à la plus grande; & moins cette même moitié, à la plus petite. Par exemple, ſoient ces deux lignes AB & BC jointes enſemble; leur difference eſt DB, & les lignes AE & EC ſont les deux moitiez de AC.



Il eſt évident que CE moins BE moitié de la difference de ces deux lignes, eſt égale à BC la petite ligne, & que AE plus DE ou EB moitié de la même difference eſt égale à AB. Soit donc AC égal à $2x$, & que AB ſoit égal à y & BC à z, que leur difference, DB ſoit 12; donc $x+6=y$ & $x-6=z$. Ainſi on peut nommer $x+6$ la grandeur y, & nommer $x-6$ la grandeur z: par ce moyen on leur donne en quelque maniere le même nom, ce qui eſt

d'une

d'une très-grande utilité, comme on le verra dans la ſuite.

Quand on connoît quelle raiſon il y a entre deux grandeurs, on les peut égaler facilement; car il eſt évident que ſi x eſt le tiers de z, il faut que x pris trois fois ſoit égal à z, comme nous l'avons dit, & qu'ainſi $3x = z$, ou que $\frac{1}{3}z = x$. Si m eſt à n comme 2 à 3, donc $m = \frac{2}{3}n$, ou $3m = 2n$.

Puis que dans une Proportion Géometrique le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens, ſi $\div a.b.c.d.$ donc $ad = bc$. & $ac = bb$ & $\frac{bc}{a} = d$; ainſi l'on peut tirer de la connoiſſance que l'on a des raiſons qui ſont entre les grandeurs propoſées, des moyens aſſez faciles de les égaler, ou de trouver entre elles des Equations; ce qui eſt la même choſe.

Lors qu'on ſait que le quarré d'une grandeur inconnue eſt égal à une connue, il ne faut que l'élever d'un degré. Je ſai que le quarré de x eſt égal à d. donc $xx = d$: Au contraire ſi je ſai que la racine de x eſt égale à d, je conclus, donc $x = dd$.

Une choſe qu'on ne peut trop dire en cette matiere, c'eſt que le ſuccès de la peine qu'on prend pour réſoudre un Problême, dépend très-ſouvent des expreſſions heureuſes dont on ſe ſert, en donnant aux grandeurs dont on parle dans une Queſtion, des ſignes convenables, ou mettant le tout pour toutes les parties, ou toutes les parties pour le tout, diſtinguant le tout en tant & tant de parties, ſelon que le nombre qu'on choiſira ſera plus commode. On ſe va voir dans la réſolution des Problêmes ſuivans.

CHAPITRE V.

Application des précédentes Règles de l'Analyſe à des Problêmes particuliers. Comment on réſout ces Problêmes ſelon la méthode ancienne par des Règles de deux fauſſes poſitions; où il eſt auſſi parlé de la Regle d'Alliage. Quelles ſont ces Règles.

QUoique tout ce qu'on vient de voir ſoit intelligible, rendons-le encore plus clair & plus ſenſible, faiſant une application de tout cela à quelques Problêmes.

PROBLEME.

24 *Une perſonne ayant rencontré des pauvres, & leur ayant voulu donner à chacun cinq ſols, elle a trouvé qu'elle en avoit un de trop peu; ainſi ne leur ayant donné qu'à chacun quatre ſols, il lui en eſt reſté ſix. Combien y avoit-il de pauvres, & combien cette perſonne avoit elle de ſols?*

Il faut tirer la ſolution de ce Problême du Problême même, c'eſt à-dire la connoiſſance de ce qu'on ignore, de la ſeule maniere dont il eſt propoſé. 1°. Il faut exprimer ſur le papier la choſe dont il eſt queſtion, la ſuppoſant faite comme le Problême dit qu'elle l'eſt, pour cela lui donnant des noms. Je nomme *x* le nombre des pauvres qui ne m'eſt pas connu, & *z* celui de l'argent qu'a cette perſonne qui m'eſt pareillement inconnu.

Je conſidere les rapports que les grandeurs inconnues *x* & *z* ont enſemble, afin que je puiſſe repréſenter la choſe, comme on ſuppoſe qu'elle

qu'elle eſt. Puis que cette perſonne ayant voulu donner à chaque pauvre cinq ſols, elle en avoit un de trop peu; donc cinq fois le nombre des pauvres moins un ſol, c'eſt-à-dire $5x-1$ eſt égal au nombre de ſols de cette perſonne, c'eſt-à-dire à z. Ainſi le rapport de x & de z, me fait trouver cette double expreſſion ou équation $5x-1=z$.

Il faut, comme on a dit, faire en ſorte que dans une queſtion il n'y ait qu'une grandeur inconnue; & pour cela trouver autant d'équations qu'il y a de grandeurs inconnues dans la queſtion. Je cherche donc une autre double expreſſion de z, conſiderant les autres rapports que peuvent avoir ces deux grandeurs x & z ſelon que la queſtion eſt propoſée. Puis que cette perſonne donnant 4 ſols à chaque pauvre, elle en a 6 de reſte; donc en multipliant x le nombre des pauvres par 4, ce qui fait $4x$, & y ajoutant ſix ſols, on fait une grandeur égale à z qui eſt ſon argent. $4x+6=z$.

Or puis que $5x-1=z$, & que $z=4x+6$, donc $5x-1=4x+6$. Il n'y a dans cette derniere équation que x d'inconnu. Mais il faut faire en ſorte que x ſe trouve d'un côté délivré de toute autre grandeur, & qu'il ſoit préciſément égal à une grandeur connue. Je fais donc cette réduction, 1°. En ajoutant 1 de part & d'autre de cette équation, ce qui fait $5x=4x+7$. 2°. En ôtant $4x$ de l'un & de l'autre membre de l'équation, après quoi il reſte $x=7$; par conſéquent x qui eſt le nombre des pauvres vaut 7. Il y avoit donc ſept pauvres. Or $4x+6=z$, c'eſt-à-dire 4 fois ſept plus ſix ou 28 plus 6 ſont égaux à z: donc $z=34$. Ainſi cette perſonne avoit 34 ſols.

Faiſons encore l'application des règles de l'Analyſe à la queſtion ſuivante, mais ſans tant de paroles.

25 *Alexandre étoit plus âgé qu'Epheſtion de deux ans, Clitus avoit quatre ans plus que la ſomme des deux âges d'Alexandre & d'Epheſtion, & leurs trois âges faiſoient 96 ans. On demande quel étoit l'âge d'un chacun.*

L'âge d'Epheſtion ſoit appellé x, celui d'Alexandre z, & celui de Clitus y. Puis qu'Epheſtion a deux ans moins qu'Alexandre, donc $x+2=z$: & puis que Clitus étoit auſſi âgé que tous deux enſemble, & de quatre ans davantage, donc $x+z+4=y$. Au lieu de z on peut ſubſtituer ſon égale $x+2$, ainſi $x+x+2+4=y$, laquelle équation étant corrigée, $2x+6=y$. Les trois âges inconnus x, z, y, ſe peuvent donc exprimer de cette maniere où il n'y a qu'une inconnue. $x. x+2. 2x+6$. Or ces trois âges réduits dans une ſomme qui eſt $4x+8$ font 96, ſelon que la queſtion eſt propoſée; donc on a cette équation $4x+8=96$. Il faut faire paſſer ce qui eſt connu d'un côté, pour cela je retranche 8 de part & d'autre, & j'ai $4x=88$: enſuite pour délivrer l'inconnue du chiffre 4, je diviſe l'un & l'autre membre par 4, après quoi j'ai $x=22$: Donc l'âge d'Epheſtion eſt 22 ans, celui d'Alexandre qui a deux ans par deſſus 24 ans, & par conſéquent celui de Clitus 50.

De la Règle de deux fauſſes poſitions.

26 Dans l'Arithmetique ordinaire, pour réſoudre les Problêmes que nous venons de propoſer, l'on ſuppoſe des nombres qui ayent quelqu'une des conditions qui appartiennent aux nom-

nombres inconnus que l'on cherche. On fait deux ſuppoſitions de nombres, qu'on nomme fauſſes ſuppoſitions, parce qu'effectivement les nombres ſuppoſez ne ſont pas les véritables que l'on cherche, quoique par leur moyen on les trouve. Pour montrer comment cela ſe fait, je vais réſoudre le dernier Problême par cette règle. Je ſuppoſe des nombres qui ayent les conditions marquées dans la queſtion; après j'ajoute ces nombres dans une ſomme, & j'obſerve quelle eſt la difference entre eux & le nombre 96, qui eſt la ſomme connue des trois âges. Cette difference ſe marque avec + & —. Je ſuppoſe donc que l'âge d'Epheſtion eſt 16 ans, ainſi celui d'Alexandre eſt 18, & celui de Clitus eſt 38. Or 16 + 18 + 38 ne font pas 96, il s'en faut 24, par conſéquent les nombres que j'avois ſuppoſez ne ſont pas les véritables, je les écris néanmoins 16 + 18 + 38 = 96 — 24. Je fais cette ſeconde ſuppoſition, que l'âge d'Epheſtion eſt 21, & qu'ainſi celui d'Alexandre eſt 23, & celui de Clitus 48. Or 21 + 23 + 48 = 96 — 4; donc cette ſeconde ſuppoſition eſt encore fauſſe. Pour trouver les nombres véritables, il faut faire évanouir les differences — 24 — 4, afin que d'un côté on trouve trois nombres, qui outre cette premiere condition marquée dans la queſtion qu'ont les nombres qu'on vient de ſuppoſer, ayent encore la ſeconde; c'eſt-à-dire qu'ils ſe trouvent préciſément égaux à 96. Voilà le principe des Règles qu'on donne que je vais expliquer, qui ſervira ici & ailleurs.

On peut faire évanouir d'une Equation une grandeur embaraſſante, ajoutant cette Equation avec une autre dans laquelle ſe trouve cette

même grandeur avec un ſigne contraire. Par exemple, ſi $x = d - 6$, & $z = d + 6$, pour faire évanouir le nombre 6, j'ajoute ces deux Equations, & les ayant corrigées, cela fait $x + z = 2d$, où 6 ne paroît plus; car -6 avec $+6$ ne fait rien. Si la même grandeur ſe trouve dans les deux Equations avec le même ſigne, ou $-$ ou $+$, il faut ſouſtraire une de ces Equations de l'autre. Par exemple, ſi $x = d - 6$, & $z = b - 6$, je retranche l'un de l'autre, & il reſte $x - z = d - b$, dans laquelle Equation 6 ne paroît plus; car quand on retranche $b - 6$ de $d - 6$, ou $b + 6$ de $d + 6$, abregeant l'expreſſion de l'opération, le reſte eſt $d - b$. Or pour faire que deux Equations ayent ainſi une même grandeur qu'on puiſſe faire évanouir, il faut multiplier réciproquement les membres de l'une par une grandeur qui ſe trouve dans l'autre Equation, de cette maniere. Soient ces deux Equations $x = c - 2$, & $z = d - 6$, je multiplie les membres de la premiere par 6, & ceux de la ſeconde par 2; ce qui me donne ces Equations $6x = 6c - 12$, & $2z = 2d - 12$; dans leſquelles ſe trouve la même grandeur 12 avec le même ſigne, ſavoir $-$. Otant une de ces Equations de l'autre Equation, j'aurai $6x - 2z = 6c - 2d$, où 12 ne paroît point.

Suivant ces principes, pour réſoudre la queſtion des âges d'Alexandre, d'Epheſtion & de Clitus; c'eſt-à-dire pour réſoudre ces deux Equations $16 + 18 + 38 = 96 - 24$, & $21 + 23 + 48 = 96 - 4$, il faut multiplier la premiere équation par la difference de la ſeconde ſuppoſition qui eſt 4, c'eſt-à-dire $16 + 18 + 38 = 96 - 24$ par 4, ce qui donne cette équation $64 + 72 + 152 = 384 - 96$, & multiplier

la

la seconde équation par 24, qui est la difference de la premiere supposition, c'est-à-dire $21 + 23 + 48 = 96 - 4$ par 24, ce qui donne $504 + 552 + 1152 = 2304 - 96$. 2°. Il faut retrancher la plus petite de ces équations de la plus grande, & il restera $440 + 480 + 1000 = 1920$, dans lequel reste -96, & -96 ne paroissent plus ; ainsi cette difference est évanouie comme on le souhaitoit. Or puis que 96 étoit 24 fois dans 2304 produit de 96 multiplié par 24, & qu'il étoit 4 fois dans 384 produit de 96 multiplié par 4 ; ayant ôté 384 de 2304, il faut qu'il y soit 24 fois, moins 4 fois, c'est-à-dire 20 fois, dans le reste qui est 1920. C'est pourquoi la Règle dit que pour réduire la derniere Equation à de plus simples termes, il la faut diviser par la plus grande difference 24 moins la petite qui est 4, c'est-à-dire par 20. Après cette division par 20, l'on a cette équation $22 + 24 + 50 = 96$, qui me fait connoitre que l'âge d'Ephestion est 22, celui d'Alexandre 24, celui de Clitus 50. Si les differences des deux suppositions avoient été $+4$ & $+24$, au lieu qu'elles étoient -4 & -24, il auroit fallu faire la même chose, c'est-à-dire les retrancher l'une de l'autre. Mais si elles avoient été -4 & $+24$, ou $+24$ & $+4$, après avoir multiplié chaque supposition par la difference de l'autre supposition, au lieu de les retrancher l'une de l'autre pour faire évanouir les differences, il auroit fallu les ajouter ; ce qui est évident, & de plus a déja été dit dans la page précédente.

Nous avions résolu le même Problême en deux coups de plume. Aussi je n'ai proposé cette derniere méthode que pour donner la

démonſtration de cette Règle de deux fauſſes poſitions, qui s'enſeigne dans les Livres de l'Arithmetique ordinaire.

De la Règle d'Alliage.

27 Lors que l'Alliage de pluſieurs choſes de differente nature eſt fait, il eſt facile de connoitre la valeur de chaque partie du tout compoſé de cet alliage, quand le prix du tout eſt connu. Par exemple, un Marchand a mis dans un vaiſſeau qui tient 300 pintes, 100 pintes de vin à 5 ſols, 100 autres à 3 ſols, & 100 autres à 10 ſols la pinte. Ces 300 pintes ainſi mêlées les unes avec les autres valent 90 livres ou 1800 ſols, on demande combien chacune doit valoir après ce mêlange. C'eſt la trois-centieme partie de 90 livres ou de 1800 ſols, qui eſt 6 ſols. Ainſi ſi on ne propoſoit que de trouver le prix de chaque pinte de ce vin qui eſt mêlé, la queſtion ſeroit aiſée.

Mais lors que l'alliage n'eſt point encore fait, & que l'on a aſſigné un certain prix moyen avec lequel il faut allier deux ou pluſieurs choſes de different prix, il y a plus de difficulté. La Règle que l'on donne pour faire cet alliage, n'eſt pas fort differente de la Règle de deux fauſſes poſitions. Tout l'artifice conſiſte à trouver combien de fois il faut prendre chacune des choſes données, pour être alliées avec une certaine grandeur moyenne, afin qu'elles faſſent une ſomme préciſément égale à cette grandeur moyenne priſe exactement autant de fois. Cela ſe comprendra mieux par un exemple.

L'on ordonne à un Marchand de vendre

son vin 6 sols la pinte; le Marchand n'a que deux sortes de vin, le premier que je nomme x vaut 3 sols la pinte, & le second que je nomme z en vaut 8. Afin qu'il ne perde point, il faut qu'il allie ces deux sortes de vin, de maniere qu'un certain nombre de pintes de vin qu'il aura mêlé, vaille précisément 6 sols, lequel prix moyen je nomme a. Il faut marquer ce rapport de x avec a, & celui de z avec le même a; ce qui donne ces deux Equations $x = a - 3$, & $z = a + 2$. Selon la Règle d'Alliage, 1°. Il faut multiplier la premiere Equation par 2, qui est la difference de la seconde Equation, ce qui donnera cette Equation $2x = 2a - 6$; & multiplier la seconde Equation par 3, qui est la difference de la premiere Equation, ce qui donne $3z = 3a + 6$. 2°. Il faut ajouter ces deux Equations dans une somme, ce qui fait $2x + 3z = 5a$. Cette Equation me fait connoitre que deux pintes de vin à 3 sols avec 3 pintes de vin à 8 sols, font 5 pintes de la valeur de 5 pintes de vin à 6 sols. Ainsi si ce Marchand, pour faire cet alliage, prend deux pintes de vin à 3 sols, il faut qu'il prenne trois pintes de vin à 8 sols pour ne tromper personne, & n'être pas trompé lui-même.

Vous voyez que cette Règle a les mêmes fondemens que la Règle de deux fausses positions. Pour faire évanouir les differences -2 & $+3$, on multiplie chacune de ces deux Equations par la difference de l'autre Equation; & comme ces differences ont des signes contraires, on ajoute en une somme les Equations, après laquelle addition ces differences s'évanouissent, comme on l'a dit.

Quand on veut allier pluſieurs grandeurs differentes avec une moyenne grandeur, il faut faire cet alliage à pluſieurs fois. Par exemple, on veut allier x des carolus qui valent 10 deniers, z des ſols marquez de quinze deniers, y des pieces de ſix blancs qui valent 30 deniers, avec des ſols. Un ſol que je nomme a eſt le prix moyen. J'allie premierement x avec y.

$x = a - 2$, & $y = a + 18$. Je multiplie la premiere Equation par 18, & la ſeconde par 2, ce qui fait $18x = 18a - 36$, & $2y = 2a + 36$. On ajoute ces deux Equations en une ſomme qui eſt $18x + 2y = 20a$. Ainſi je ſai qu'il faut mettre 18 carolus avec 2 pieces de ſix blancs, pour faire 20 ſols en 20 pieces.

Après cela j'allie z avec x; car dans cet alliage il faut comparer une grandeur avec une qui ſoit plus petite que la moyenne, ſi elle eſt plus grande que la moyenne; ou avec une plus grande que la moyenne, ſi elle eſt plus petite que la moyenne. Or ſelon les rapports que la queſtion me fait connoître que z & x ont avec a, je trouve ces deux Equations $z = a + 3$, & $x = a - 2$. Je multiplie la premiere par 2, & la ſeconde par 3, & j'ajoute en une ſomme ces deux produits, ce qui fait $2z + 3x = 5a$, laquelle Equation étant jointe avec la précédente, $18x + 2y = 20a$, cela fait $21x + 2z + 2y = 25a$. Ainſi pour faire l'alliage propoſé, c'eſt-à-dire pour faire 25 ſols en 25 pieces, il faut prendre 21 carolus, 2 pieces de ſix blancs, & 2 ſols marquez valant 15 deniers.

On reconnoit ſi un Problême eſt poſſible ou non, car ſi l'on propoſoit de faire 20 ſols en

20 de ces trois pieces dont nous venons de parler, il eſt évident que le Problême ſeroit impoſſible, parce que l'on ne peut pas les allier, comme nous venons de le voir, à moins que de prendre 21 carolus, 2 ſols marquez, & 2 pieces de ſix blancs; ce qui fait 25 pieces.

On réſout pluſieurs Problêmes par le moyen de cette Règle d'alliage, par exemple, celui-ci: *Il y avoit*, dit-on, *dans un bateau des hommes, des femmes & des enfans; les hommes pour le paſſage payoient ſix-blancs, les femmes un ſol marqué, & les enfans un carolus; & l'on ſait que toutes ces pieces faiſoient 15 ſols en 13 pieces. Combien y avoit-il d'hommes? combien de femmes? combien d'enfans?* Il faut allier ces pieces. Je leur donne des noms; j'appelle a ſix-blancs, b les ſols marquez de quinze deniers, & c les carolus de dix deniers, & m le prix moyen qui eſt un ſol. J'allie a avec c, & j'ai ces équations $a-6=2m$, & $c+2=m$. Je multiplie la premiere équation par 2, ce qui me donne $2a-12=4m$; & la ſeconde par 6, ce qui fait $6c+16=6m$. J'ajoute ces deux équations enſemble, j'ai $2a+6c=10m$.

J'allie enſuite b avec c. J'ai cette équation, $b-3=m$, & $c+2=m$. Je multiplie la premiere par 2, ce qui fait $2b-6=2m$, & la ſeconde par 3, ce qui fait $3c+6=3m$. J'ajoute ces deux produits en un, $3c+2b=5m$. Je joins celui-ci avec le produit du premier alliage qui eſt $2a+6c=10m$, cela fait $2a+2b+9c=15m$; ce qui me fait connoître qu'il y avoit deux hommes, deux femmes, neuf enfans.

Il eſt facile de ſe tromper en ces ſortes de Problêmes, ſur-tout lors qu'il y a pluſieurs

grandeurs, parce que l'alliage se peut faire en différentes manieres; comme en cet exemple. *Une troupe de cent personnes composée d'hommes, de femmes, d'enfans & de serviteurs, ont dépensé dans un voyage* 100 *pistoles. Les hommes ont dépensé chacun trois pistoles, les femmes chacune une, chaque enfant une demie pistole, & chaque serviteur une septieme.* h est l'argent des hommes, f celui des femmes, e celui des enfans, & s celui des serviteurs. S'il étoit question de savoir le nombre des hommes, des femmes, des enfans & des serviteurs séparément, l'on ne pourroit pas conclure qu'il y eût nécessairement 28 hommes, 5 femmes, 4 enfans, 63 serviteurs, de ce que $28s + 5f + 4e + 63s = 100$ pistoles; car on peut allier ces quatre grandeurs en plusieurs differentes manieres, de sorte qu'elles fassent toujours 100 pistoles, comme vous le voyez dans cet exemple. $25b + 15f + 4e + 56s = 100$. Cent pieces de differentes valeurs font encore ici 100 pistoles. Bachet dans ses Commentaires sur Diophante, Liv. IV. Question 4e. propose en nombres entiers quatre-vingt & une résolutions differentes de cette question.

CHAPITRE VI.

Résolution de plusieurs Problêmes.

28 POur faire voir avec plus d'étendue l'usage de la méthode qu'on enseigne ici, je proposerai dans ce Chapitre plusieurs Problêmes. Je les énonce d'une maniere abstraite pour abreger, & en même-tems pour en rendre les réso-

réſolutions plus générales. J'aurois pu par exemple propoſer le premier Problême qui ſuit, d'une maniere moins abſtraite, en le propoſant ainſi. *Deux hommes ont enſemble cent écus, l'un a 40 écus plus que l'autre: quel eſt l'argent d'un chacun?* On pourroit de la même maniere au lieu de l'énoncé de chacun des autres Problêmes former des Queſtions de cette nature, faire des enigmes telles que Bachet en propoſe 45 qu'il a trouvées dans l'Anthologie Grecque. En voici une. *Une Aneſſe dit à une Mule, ſi je t'avois donné un de mes ſacs, nous en aurions autant l'une que l'autre: & ſi tu m'en avois donné un des tiens, j'en aurois le double de toi. Combien l'Aneſſe avoit-elle de ſacs?* Ces queſtions ſeroient divertiſſantes; mais cela m'obligeroit à de longs diſcours. Je pourrois auſſi faire voir que la réſolution de chaque Problême donne lieu de faire un Théorême, comme vous allez voir dans le Problême ſuivant qu'on le peut faire.

Probleme Premier.

Diviſer ce nombre 100 *en deux parties, telles que leur difference ſoit* 40.

La plus grande partie de 100 ſoit nommée z, & la plus petite x. Leur difference doit être 40. J'ai donc cette double expreſſion ou équation $x+40=z$, ou $z-40=x$. Ainſi je puis ſubſtituer $x+40$ en la place de z, & $z-40$ en la place de x.

Pour trouver une ſeconde équation par le moyen de laquelle une des grandeurs inconnues ſe trouve ſeule, comparée avec des grandeurs connues: je conſidere que ſelon que la queſtion eſt propoſée $x+z=100$, ou $x+x+40=100$,

$= 100$, ou $z + z - 40 = 100$. L'une ou l'autre que je prenne de ces deux dernieres équations, je puis résoudre ce Problême facilement: car dans $x + x + 40 = 100$, ôtant 40 de part & d'autre j'aurai $x + x = 60$, & prenant la moitié de ce reste je trouverai que $x = 30$; ainsi je connois la valeur de x. Dans $z + z - 40 = 100$, si j'ajoute 40 de part & d'autre, j'aurai $z + z = 140$, dont prenant la moitié j'aurai $z = 70$; ainsi la valeur de z me sera connue.

Or vous voyez que puisque $x + x + 40 = 100$, donc il est vrai que *deux fois la plus petite partie d'une grandeur plus sa difference avec l'autre partie de cette grandeur, est égale à toute la grandeur.* Et puisque $2z - 40 = 100$, donc *deux fois la plus grande partie moins sa difference avec la plus petite partie est égale à toute la grandeur.* Voila donc un Théorême. La résolution de tous les Problêmes que vous verrez vous donnera de la même maniere la connoissance d'un Théorême. Il suffit de l'avoir montré en cet exemple. C'est ainsi qu'on a trouvé la plupart des Théorêmes de la Géometrie.

Probleme Second.

Couper ce nombre 100 *en deux parties, telles que la plus grande soit égale à trois fois la plus petite plus vingt unitez.*

Soit nommée z la plus grande, & x la plus petite. Selon que la question est proposée $3x + 20 = z$. Au lieu de z je puis donc substituer $3x + 20$ par-tout où il faudra mettre z: & puis que z & x sont les deux parties de 100, & qu'ainsi $z + x = 100$, il faut que $3x + 20 + x$, ou $4x + 20$, soit égal à 100. Ainsi $4x + 20 = 100$. Donc en retranchant 20 de part & d'autre, $4x$

$= 80$.

$=80$. Si on divise par 4 l'un & l'autre membre, on a cette équation $x=20$. Ainsi 20 est la valeur de x, & par conséquent puis que $3x+20=z$, donc la valeur de z est 80.

Probleme Troisieme.

Partager 60 *en deux nombres tels que* $\frac{1}{5}$ *du premier plus* $\frac{1}{3}$ *du second fassent* 14.

Je nomme x la cinquieme partie du premier nombre que je cherche, & z le second; ainsi le premier est $5x$. Et puis que x avec un tiers de z est égal à 14, comme on le suppose, $14-x=\frac{1}{3}z$. Je multiple cette équation par 3, & j'ai $42-3x=z$. Or $5x+z=60$. Donc mettant $42-3x$ en la place de z, j'aurai $5x+42-3x$, ou $42+2x=60$. J'ôte 42 de part & d'autre, donc $2x=18$, donc $x=9$ & $5x=45$; donc le premier nombre est 45, & partant le second est 15.

Probleme Quatrieme.

On cherche deux nombres dont on sait que le plus petit est le tiers du plus grand, & que si on ôte le plus petit de 16 *& le plus grand de* 30, *les restes seront égaux.*

Le plus petit soit x, l'autre soit z. Par la premiere supposition $3x=z$, & par la seconde $16-x=30-z$. Substituant $3x$ égal à z en la place de z, alors on aura cette équation $16-x=30-3x$. J'ajoute de part & d'autre un x, & j'ai $16=30-2x$. J'ajoute ensuite de part & d'autre $2x$, & j'ai $16+2x=30$. Je retranche 16 de part & d'autre, & j'ai $2x=14$. Je divise l'un & l'autre membre par 2, & j'ai $x=7$;

$x = 7$; ainſi x vaut 7, & par conſéquent z qui eſt égal $3x$ vaut 21.

Probleme Cinquieme.

On cherche deux nombres qui ſoient entre eux comme 1 *eſt à* 5 ; *mais qui deviennent comme* 1 *eſt à* 3, *après avoir ajouté* 4 *au plus petit, &* 6 *au plus grand.*

Le plus petit ſoit x, le plus grand z. Puis que x eſt la cinquieme partie de z, donc $5x = z$; & puis qu'ayant ajouté 4 à x & 6 à z, pour-lors $x + 4$ eſt le tiers de $z + 6$, ou de $5x + 6$; car $5x$ eſt égal à z : Donc multipliant $x + 4$ par 3 on aura cette équation $3x + 12 = 5x + 6$. Retranchant de part & d'autre $3x$ & 6, il ne reſte plus que $6 = 2x$: diviſant ces deux membres par 2 on a $3 = x$; donc x vaut 3, & par conſéquent z vaut 15, puis qu'il vaut cinq fois x.

Probleme Sixieme.

Cette grandeur inconnue $x - 30$ *eſt le triple de* $x - 100$. *On cherche la valeur de la grandeur* x.

Puis que $x - 30$ eſt le triple de $x - 100$, donc $x - 30 = 3x - 300$. J'ajoute 30 de part & d'autre, & pour-lors j'ai $x = 3x - 270$. J'ajoute derechef 270, & j'ai $x + 270 = 3x$, j'ôte un x de part & d'autre, il reſte $270 = 2x$. Je diviſe cette équation par 2, ce qui me donne $135 = x$, donc x vaut 135.

Probleme Septieme.

Il faut diviſer 100 *en deux parties, de telle ſorte que le* $\frac{1}{3}$ *de la premiere avec le* $\frac{1}{5}$ *de la ſeconde faſſe* 30.

La

La premiere partie ſoit x, la ſeconde z; donc $100 - x = z$, & $100 - z = x$. Par la ſuppoſition qu'on fait que $\frac{1}{3}$ de la premiere partie x avec $\frac{1}{7}$ de z ſeconde partie égale à $100 - x$, eſt égal à 30, l'on a cette équation $\frac{1}{3}x + \frac{1}{7}100 - \frac{1}{7}x = 30$. Il faut corriger cette équation, & la réduire à de plus ſimples termes. Pour cela j'en multiplie les membres par ce nombre 15, qui peut être diviſé exactement par 3 & par 5. Je multiplie premierement le ſecond membre 30 par ce nombre 15, ce qui fait 450; enſuite je multiplie l'autre membre, commençant par $\frac{1}{3}x$, qui étant multiplié par 15, le produit eſt quinze tiers qui ſont cinq entiers; ainſi le produit de cette multiplication eſt $5x$. Enſuite je multiplie $\frac{1}{7}100 - \frac{1}{7}x$ par 15, ce qui, ſelon les règles, donne $300 - 3x$; ainſi j'ai cette équation $5x + 300 - 3x = 450$. Je corrige cette équation, ôtant du premier membre $3x$ qui ſe trouve avec des ſignes contraires, & j'ai $2x + 300 = 450$. Je retranche de part & d'autre 300, après quoi $2x = 150$. Je diviſe cette équation par 2, ce qui me donne $x = 75$, par conſéquent x vaut 75. Or $100 - x$, ou $100 - 75$, ou $25 = z$; donc la valeur de z eſt 25.

PROBLEME HUITIEME.

Trouver un nombre, lequel ajouté à 100 *& à* 20, *faſſe deux nombres qui ſoient l'un à l'autre comme* 4 *eſt à* 1.

Le nombre qu'on cherche ſoit nommé x; je ſuppoſe la choſe faite, ſavoir que $20 + x$, $100 + x$ :: 1. 3. Le produit des extrêmes eſt égal à celui

celui des moyens ; partant $60 + 3x = 100 + x$. Je retranche 60 & une fois x de part & d'autre, & j'ai $2x = 40$. Je divise cette équation par 2 ; j'ai $x = 20$, par conséquent x vaut 20, qui ajouté à 100 fait 120 triple de $20 + 20$ ou de 40.

Probleme Neuvieme.

Connoissant la difference de deux grandeurs, & le rapport de l'une à l'autre, trouver chaque grandeur.

Je nomme x la plus petite. Sa difference à la plus grande est b. Donc cette plus grande est $x + b$. On suppose que $x . x + b :: 1 . 3$. donc $3x = x + b$. J'ôte x de part & d'autre; donc $2x = b$: donc $x = \frac{1}{2}b$. Si $x . x + b :: 2 . 3$. alors $3x = 2x + 2b$. J'ôte $2x$ de part & d'autre, & j'ai $x = 2b$. Ainsi la valeur de x est connue. L'expression de ce Problême est générale, par conséquent quelque raison & quelque difference qu'on puisse supposer être entre des grandeurs données, on trouvera la valeur de ces grandeurs comme on vient de trouver la valeur de x.

Probleme Dixieme.

Connoissant la somme de deux grandeurs, & le produit de l'une par l'autre, trouver chaque grandeur.

Je nomme la somme de ces deux grandeurs $2a$, & leur difference $2z$. Ainsi comme on l'a fait voir *sup.* n. 13 la plus petite sera $a - z$, & la plus grande $a + z$: leur produit connu soit nommé b ; donc selon que la question

queſtion eſt propoſée, multipliant $a-z$ par $a+z$, leur produit $aa+az-az-zz$ ſera égal à b. Puis que $+az-az$ ne font rien, on a cette équation $aa-zz=b$. Ajoutant zz de part & d'autre on a $aa=b+zz$. Otant b, reſte $aa-b=zz$. Donc ôtant b du quarré aa, la racine quarrée du reſte ſera la valeur de z.

L'expreſſion de ce Problême eſt encore fort générale. Exprimant de la maniere que nous venons de faire deux grandeurs dont on connoit la ſomme ou leur difference, on réſout une infinité de queſtions.

PROBLEME ONZIEME.

L'on demande que l'on diviſe ce nombre 100 *en deux parties, telles que la plus grande* z *étant multipliée par la plus petite* x, *le produit qui eſt* xz *ſoit à* xx *quarré de la plus petite, comme* 10 *eſt à* 1.

On ſuppoſe que la plus petite eſt x, & la plus grande eſt z. Puis que z & x ſont les parties de 100, donc $100-z=x$, & $100-x=z$. Or ſelon que la queſtion eſt propoſée, x ayant été multiplié par z ou par la grandeur qui lui eſt égale, ſavoir $100-x$, le produit $100x-xx$, doit être à xx comme 10 à 1.

$$100x-xx.\ xx :: 10.\ 1.$$

Par conſéquent puis que le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens, $100x-xx=10xx$, j'ajoute xx de part & d'autre, & j'ai $100x=11xx$. Je diviſe les membres de cette équation par x, & j'ai $100=11x$. Je diviſe de nouveau les membres de cette équation

tion par 11 ; le quotient de cette division est $9\frac{1}{11}$ d'une part, & x de l'autre : donc $9\frac{1}{11} = x$; donc x vaut $9\frac{1}{11}$, & partant z qui est l'autre partie de 100, vaut $90\frac{10}{11}$.

Probleme Douzieme

J'ai dépensé un certain nombre de livres, dont je ne me souviens plus ; je sai seulement que le $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ *de ce nombre* $+ 22 = 94$. *Trouver ce nombre de livres.*

Tous ces nombres rompus ajoutez dans une somme, font $\frac{26}{24}$; donc $\frac{26}{24} + 22 = 94$. J'ôte 22 de part & d'autre, ce qui me donne $\frac{26}{24} = 72$. Puis que 72 est ainsi égal à $\frac{26}{24}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ du nombre que je cherche, & que je nomme x ; je sai donc que 72 doit être à x, comme 26 est à 24, qui represente l'entier x. Par conséquent 26. 24 :: 72. x ; multipliant donc 72 par 24, & divisant le produit de cette multiplication par 26, le quotient de cette division qui est $66\frac{6}{13}$, donnera la valeur de x qu'il falloit trouver.

Probleme Treizieme.

Ce nombre 576 est un nombre plan, on cherche ses racines inconnues x & z, *qui sont entre elles comme* 1 & 4.

Selon que ce Problême est proposé, on sait que xz :: 1. 4. & que $xz = 576$. Or puis que le produit des extrêmes x & 4 est égal à celui des moyens qui sont ici z & 1 ; donc $4x = z$. Ainsi au lieu de xz on peut mettre $4xx$: &

puis

puis que xz eſt égal à 576, donc $4xx = 576$. Je diviſe cette équation par 4, j'ai $xx = 144$; je prends la racine quarrée des deux membres, ce qui me donne $x = 12$; donc x vaut 12, & par conſéquent z vaut 48.

Probleme Quatorzieme.

On veut partager le nombre 178 *en trois parties qu'on nomme* x, y, z, *telles que* $\frac{x}{5} = 8z$, *& que* $8z = \frac{y}{6}$.

Pour réſoudre ce Problême il n'eſt queſtion que de trouver la proportion qui eſt entre ces trois parties, ce que l'on connoitra par le moyen des deux équations; car puis que $\frac{x}{5} = 8z$, donc en multipliant l'un & l'autre membre par 5, l'on aura $x = 40z$; ainſi on ſait déja que puis que x eſt égal à 40 fois z, il faut que $z.x :: 1.40$. En ſecond lieu, puis que $\frac{y}{6} = 8z$; en multipliant cette équation par 6, on a $y = 48z$: donc on ſait que y eſt égal à 48 fois z, & qu'ainſi $z.y :: 1.48$. Cela fait connoitre les raiſons des trois grandeurs z, x, y. ſavoir, que $z.x.y :: 1.40.48$. Pour achever ce Problême, il faut par le Liv. III. n. 81. diviſer 178. proportionnellement à ces trois nombres 1. 40. 48. qui ajoutez enſemble font 89.

Probleme Quinzieme.

Ce nombre 30 *étant donné, trouver ſes trois parties* x. y. z. *On ſait que* ÷ x. y. z. *& que* xy. xz :: 1. 4.

Pour réſoudre ce Problême, il n'eſt queſtion que de trouver la raiſon qu'ont entre elles ces parties *x*. *y*. *z*. du nombre 30. qu'on ſuppoſe en progreſſion. On ſuppoſe encore $xy.\ xz :: 1.\ 4$. Donc puis que l'on a démontré Liv. III. n. 63. que xy eſt à xz comme y à z; il faut que z ſoit quatre fois plus grand que y. Et puis que x eſt le premier terme de la progreſſion, ſi on dit que z ſoit 16, & par conſéquent que y ſoit 4, x doit être 1. Il ne s'agit donc plus que de diviſer 30 proportionnellement à ces trois nombres 1. 4. 16. dont la ſomme eſt 21. On trouvera Liv. III. n. 82. ces trois nombres $1\frac{9}{21}$. $5\frac{11}{21}$. $22\frac{12}{21}$, qui ſeront les trois parties de 30 que l'on cherchoit.

Probleme Seizieme.

On cherche deux nombres x *&* z. *On ſait qu'ôtant* 1 *de* z, *& l'ajoutant à* x, *alors* x *eſt double de* z; *& qu'ôtant* 1 *de* x *& l'ajoutant à* z, *alors* x *&* z *ſont égaux.*

Selon la premiere ſuppoſition $2z - 2 = x + 1$, & ſelon la ſeconde $z + 1 = x - 1$. Il faut réduire les deux inconnues z & x à une ſeule, z à x, ou x à z. Si on veut faire évanouir x, il faut ajouter aux deux membres de l'équation $z + 1 = x - 1$ la même grandeur 1, après quoi on aura $z + 2 = x$. Mettant donc

$z +$

$z+2$ pour x dans l'Equation $2z-2=x+1$, pour-lors $2z-2=z+3$. Ajoutez 2 de part & d'autre, vous aurez $2z=z+5$. Retranchez un z de part & d'autre, & vous aurez $z=5$. Et puis que $z+2=x$, donc $x=7$.

Remarquez que ce Problême exprimé d'une maniere abſtraite, eſt le Problême de la Mule & de l'Aneſſe dont nous avons parlé ci-deſſus. x marque le nombre des ſacs de l'Aneſſe, & z celui des ſacs de la Mule. Ainſi l'Aneſſe avoit ſept ſacs, & la Mule cinq. Si on enſeignoit ce petit ouvrage à de jeunes gens, il faudroit appliquer ces Problêmes à de ſemblables queſtions pour les divertir, & les convaincre en même tems de l'utilité de l'Analyſe.

Probleme Dix-septieme.

1. z :: 1. 3. & zz. x :: 6. 1. *L'on cherche la valeur de* x *&* z.

De la maniere que cette queſtion eſt propoſée, il faut que x ſoit le tiers de z : donc $z=3x$. Et puis que zz. x :: 6. 1. mettant $3x$ en la place de z, ou $9xx$ quarré de $3x$ en la place de zz quarré de z, j'exprimerai ainſi la proportion précédente: $9xx, x$ :: 6. 1. où z ne paroît plus. Le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens; donc $9xx=6x$. Je diviſe les membres de cette équation par 9, & j'ai $xx=\frac{6x}{9}$, ou $\frac{2x}{3}$. Je les diviſe encore par x; & j'ai $x=\frac{2}{3}$. Ainſi x vaut $\frac{2}{3}$, & par conſéquent z vaut 2, dont le quarré qui eſt 4 eſt ſix fois plus grand que $\frac{2}{3}$.

Probleme Dix-huitieme.

Connoiſſant le premier & le ſecond terme d'une Progreſſion Géometrique, avec la ſomme de tous les termes; connoitre combien elle a de termes, & la valeur du dernier.

Soit cette progreſſion ÷ 2. 6..... x. Le premier terme & le ſecond ſont des nombres connus, les autres ſont inconnus, ainſi j'ai marqué leur place avec des points. On ſait que 728 eſt la ſomme de tous les termes. Je nomme x le dernier terme. 728 contient x, & outre cela la ſomme de tous les termes qui précédent x, qui eſt ainſi $728-x$. Or Liv. III. n. 90. $6-2.\ 2::x-2.\ 728-x$. Donc $2x-4$ produit des moyens eſt égal à $2912-4x$ produit des extrêmes. Ainſi $2x-4=2912-4x$. J'ajoute $4x$ de part & d'autre, ce qui fait $6x-4=2912$. J'ajoute encore de part & d'autre 4, ce qui fait $6x=2916$, que je diviſe par 6, & j'ai $x=486$. Le dernier terme eſt donc 486. On connoitra le nombre des termes de la progreſſion propoſée, par ce qui a été enſeigné, Liv. III. n. 98.

Ce Problême eſt celui dont on avoit promis la réſolution, Liv. III. n. 101.

Probleme Dix-neuvieme.

Connoiſſant la difference qui eſt entre deux grandeurs inconnues, & un moyen proportionnel entre ces grandeurs, connoitre ces grandeurs.

Les grandeurs données ſont y & z, leur difference eſt 8. Le moyen proportionnel qui eſt entre elles eſt d. Il faut premierement exprimer ces deux grandeurs, de maniere qu'elles ſe réduiſent

réduisent à une expression où il n'y ait qu'une lettre inconnue. Supposant que $2x = z + y$, & prenant 4 moitié de la difference de z à y, selon ce que nous avons enseigné ci-dessus, n. 23. $x + 4$ doit être égal à z, si z est plus grand que y, & $x - 4$ égal à y, si y est plus petit que z. Par conséquent selon que la question est proposée, $\div x + 4. d x + 4$. Le produit des extrêmes qui est $xx - 16$, est égal à dd quarré de d moyen proportionnel : Donc $xx - 16 = dd$. Transportez 16 pour avoir $xx = dd + 16$. La grandeur d est connue: si elle étoit 3, donc dd seroit 9; ainsi $xx = 25$, laquelle équation on réduit par l'extraction de la racine quarrée à celle-ci $x = 5$. Or $z = x + 4$; donc $z = 9$, & par conséquent $y = 1$.

Problême Vingtieme.

Trois personnes ont chacune un nombre d'écus; la premiere & la seconde ont a *plus que la troisieme; la premiere & la troisieme ont* b *plus que la seconde; & la seconde & la troisieme ont* c *plus que la premiere. On demande ce que chacun doit avoir.*

Soit x le nombre des écus de la premiere, y celui de la seconde, & z celui de la troisieme. Selon que la question est proposée, 1°. $x + y - a = z$; donc $x = z - y + a$.

2°. $x + z - b = y$; donc $x = y - z + b$.

3°. $x = y + z - c$.

Remarquez que tous les seconds membres de ces trois équations, $x = z - y + a$. $x = y - z + b$. $x = y + z - c$, sont égaux entre eux étant égaux à x. Donc $z - y + a = y + z - c$. & $y + z - c = y - z + b$.

Je considere cette équation $z - y + a = y + z - c$. J'ôte z de part & d'autre, reste $-y$

$+a=y-c$. J'ajoute y, & j'ai $a=2y-c$. J'ajoute encore c, & j'ai $a+c=2y$; donc y vaut la moitié de $a+c$.

De même je réduis cette équation $y-z+b=y+z-c$ à celle-ci $b+c=2z$, en ôtant de part & d'autre y, & vient $-z+b=z-c$. J'ajoute de part & d'autre z & j'ai $b=2z-c$. J'ajoute encore c & vient $b+c=2z$. Donc z est égal à la moitié de $b+c$. Or $x=y+z-c$; donc la valeur de x ne peut plus être inconnue. Sa valeur sera la moitié de $a+c+b+c$ valeur de $y+z$, retranchant de cette somme la valeur de c.

Probleme Vingt-unieme.

On sait que x. z. y. :: 9. 12. 16. *Outre cela que* $xx+zz+yy=4329$. *Il faut trouver la valeur de ces trois grandeurs*, x. z. y.

Puis que $x.z.y.$ :: 9. 12. 16. donc $xx.zz.yy.$ :: 81. 144. 256. Ces trois nombres sont les quarrez de 9, 12, & 16. leur somme est 481. Par l'hypothese celle des quarrez xx, zz, & yy est 4329. Divisant donc cette somme 4329, selon qu'il a été enseigné Liv. III. n. 82. proportionnellement aux parties de 481, on aura la valeur de chacun de ces trois quarrez inconnus: savoir $xx=729$, $zz=1296$, $yy=2304$. Dont ayant extrait les racines, on a $x=27$, $z=36$, $y=48$.

Probleme Vingt-deuxieme.

2 a *est la somme de deux grandeurs, dont le produit ajouté à la somme de leurs quarrez est* c; *trouver chaque grandeur.*

Je nomme $2y$ leur difference qui est inconnue,

nüe, tellement que la plus petite ſera $a-y$, & la plus grande $a+y$; leur produit eſt $aa-yy$. La ſomme de leurs quarrez eſt $2aa+2yy$, laquelle avec ce produit fait $3aa+yy$ égal à c. Ainſi on a cette équation $3aa+yy=c$; donc $yy=c-3aa$. Or $c-3aa$ eſt tout connu; donc yy le ſera pareillement; & par conſéquent ſa racine y, au moyen de laquelle on connoitra les deux grandeurs $a-y$ & $a+y$.

PROBLEME VINGT-TROISIEME.

Connoiſſant la ſomme de deux grandeurs & la ſomme de leurs quarrez, trouver chaque grandeur.

Soit $2a$ la ſomme des grandeurs qu'on veut connoitre, & c la ſomme de leurs quarrez. Je nomme $2z$ la difference des deux grandeurs; ainſi la plus petite eſt $a-z$, & la plus grande $a+z$. Le quarré de $a-z$ eſt $aa-2az+zz$, & celui de $a+z$ eſt $aa+2az+zz$. Ces deux quarrez ajoutez enſemble font $2aa+2zz$. Or c eſt égal à ces deux quarrez; donc $2aa+2zz=c$, donc $2zz=c-2aa$, & $zz=\frac{c}{2}-aa$. Pour connoitre z il faut retrancher aa de la moitié de c; & du reſte en prendre la racine quarrée, qui ſera la valeur de z.

PROBLEME VINGT-QUATRIEME.

Connoiſſant la ſomme de deux grandeurs, & la difference de leurs quarrez, trouver chaque grandeur.

Soit $2a$ la ſomme de ces grandeurs, leur difference qui eſt inconnue ſoit $2z$. La plus petite eſt $a-z$. La plus grande $a+z$. Le quarré de $a-z$ eſt $aa-2az+zz$: celui de $a+z$ eſt $aa+2az+zz$. La difference de ces deux

quarrez est $4az$ qui est égale à b. Donc $4az = b$. Je divise cette équation par $4a$, après quoi $z = \frac{b}{4a}$; ainsi le quotient de b divisé par $4a$ est la valeur de z.

Problème Vingt-cinquieme.

Connoissant la somme de deux grandeurs, & la somme de leurs cubes, ou la difference de leurs cubes, trouver chaque grandeur.

Ce Problême se résout comme les deux précédens.

Problème Vingt-sixieme.

Connoissant que le produit de deux grandeurs est 32, *& que la somme de leurs quarrez est* 80, *trouver quelles sont ces grandeurs.*

Je nomme $2x$ leur somme & $2z$ leur difference. Ainsi selon ce qu'on a dit *sup.* n. 23. dont vous voyez que nous faisons tant d'usage, $x - z$ sera la plus petite de ces deux grandeurs inconnues, & $x + z$ la plus grande. Le produit de ces deux grandeurs est $xx - xz + xz - zz$ égal, comme on le suppose, à 32. Ainsi corrigeant l'expression de ce produit on a cette équation $xx - zz = 32$, ou $xx = 32 + zz$.

Le quarré de la plus petite de ces deux grandeurs est $xx - 2xz + zz$: celui de la plus grande est $xx + 2xz + zz$. La somme de ces quarrez est $2xx + 2zz$ égale à 80, selon que la question est proposée. On a donc cette équation $2xx + 2zz = 80$, ou $2xx = 80 - 2zz$. Divisant cette équation par 2, vient $xx = \frac{80 - 2zz}{2}$.

On

On a trouvé que $xx = 32 + zz$. Donc substituant $32 + zz$ au lieu de xx, on aura cette équation $32 + zz = \frac{80 - 2zz}{2}$ que je multiplie par 2, & j'ai $64 + 2zz = 80 - 2zz$. J'ajoute $2zz$, & j'ai $64 + 4zz = 80$. Je retranche 64 & j'ai $4zz = 80 - 64$, c'est-à-dire $4zz = 16$. Je divise par 4, ainsi $zz = 4$: Partant z moitié de la difference de ces deux grandeurs qu'on cherche est 2; la difference entiere est donc 4. Puis que $xx - zz$ leur produit est égal à 32, qu'ainsi $xx = 32 + zz$, c'est-à-dire que $xx = 36$, donc x vaut 6. La plus petite des grandeurs qu'on cherche est $x - z$, & la plus grande $x + z$. c'est-à-dire $6 - 2$ & $6 + 2$. Donc ces grandeurs sont 4 & 8.

Probleme Vingt-septieme.

2y est la somme de deux grandeurs inconnues: leur difference est 2z: leur produit connu b, & c la valeur de ce produit ajouté à la somme de leurs quarrez; il faut connoître ces grandeurs.

La plus petite est $y - z$; la plus grande $y + z$. Leur produit est $yy - zz$. Leurs quarrez sont $yy - 2yz + zz$ & $yy + 2yz + zz$. Ces deux quarrez joints avec le produit $yy - zz$ font $3yy + zz$. Or $yy - zz = b$, donc $yy = b + zz$; partant $yy - b = zz$. Par l'hypotheſe encore $3yy + zz = c$, donc $zz = c - 3yy$. Donc $yy - b = c - 3yy$. Et ajoutant $3yy$, on a $4yy - b = c$, & par conſéquent $4yy = c + b$ & $yy = \frac{1}{4}c + \frac{1}{4}b$ &c.

Probleme Vingt-huitieme.

Le ſolide c eſt fait du produit de 2y ſomme de

deux grandeurs par la ſomme des quarrez de ces grandeurs, & le ſolide d *eſt fait par* 2z *difference de ces grandeurs multipliée par la difference des quarrez de ces grandeurs. Connoître chaque grandeur.*

La plus petite de ces deux grandeurs eſt $y-z$, & la plus grande $y+z$. La ſomme de leurs quarrez eſt $2yy+2zz$, dont le produit par $2y$ eſt $4y^3+4yzz$ égal à c. La difference des quarrez de $y-z$ & $y+z$ eſt $4yz$, qui multipliée par $2z$ fait $8yzz$ égal à d. Donc $4y^3+4yzz=c$, & $8yzz=d$. Or la premiere équation ſe réduit à celle-ci $yzz=\frac{1}{4}c-y^3$, & la ſeconde à celle-ci $yzz=\frac{1}{8}d$. Donc $\frac{1}{4}c-y^3=\frac{1}{8}d$. Donc $\frac{1}{4}c=\frac{1}{8}d+y^3$, & $\frac{1}{4}c-\frac{1}{8}d=y^3$, &c.

Probleme Vingt-neuvieme.

On cherche la valeur de x *&* de y, *dont la difference eſt* z. *On ſait ſeulement que le produit de* x *&* de y *diviſé par leur difference* z *eſt* $5\frac{1}{4}$.

Selon que la queſtion eſt propoſée, yx produit de x multiplié par y, étant diviſé par z, le quotient de cette diviſion eſt égal à $5\frac{1}{4}$. Ainſi on a cette équation $\frac{yx}{z}=5\frac{1}{4}$. Mais elle ne ſuffit pas, il en faut avoir une autre, qu'on ne peut point trouver, parce que cette queſtion n'eſt point déterminée, c'eſt-à-dire que les grandeurs qu'on cherche n'ont point de rapport particulier qui les détermine de telle ſorte qu'il n'y ait qu'une ſeule grandeur à qui ce rapport convienne. Pluſieurs grandeurs peuvent avoir ce même rapport; ainſi

ainſi on peut ſuppoſer telle grandeur qu'on voudra. Je ſuppoſe donc que la plus petite des deux grandeurs propoſées eſt 3, la plus grande eſt donc $z+3$. Le produit de 3 & de $z+3$ eſt $3z+9$, qui étant diviſé par z, le quotient doit être $5\frac{1}{4}$. Ainſi $\frac{3z+9}{z}=5\frac{1}{4}$. Je multiplie les membres de cette équation par z, & j'ai $3z+9=5z+\frac{1}{4}z$. Je retranche $3z$ & vient $9=2z+\frac{1}{4}z$. Pour délivrer l'équation de cette fraction, je la multiplie par 4, & j'ai $36=8z+z$. Par conſéquent $36=9z$ que je diviſe par 9, après quoi $4=z$. Ainſi z vaut 4, & partant comme la plus petite grandeur qu'on cherchoit eſt 3, la plus grande ſera 7. Le produit de 3 par 7 eſt 21. Ce nombre étant diviſé par 4, le quotient eſt $5\frac{1}{4}$. Ainſi ces deux nombres ſatisfont à la queſtion. En prenant tout autre nombre que 3, j'aurois réſolu de la même maniere la queſtion; c'eſt-à-dire que j'aurois trouvé d'autres nombres qui y auroient ſatisfait.

PROBLEME TRENTIEME.

Ce nombre 34 eſt compoſé de ces deux nombres quarrez 9 & 25. Il faut partager ce nombre en deux autres nombres quarrez, de telle maniere que ce que l'on ajoute à la racine de l'un ſoit la moitié de ce qu'on ôte de la racine de l'autre.

La racine de 9 eſt 3, celle de 25 eſt 5. Pour réſoudre ce Problême, il faut trouver deux autres racines, dont l'une ſoit plus petite, & l'autre plus grande. J'ajoute x à 3. L'on de-

mande outre cela, que ce que l'on ôte de 5 soit le double de ce que l'on ajoute à 3; ainsi si la premiere racine est $3 + x$, la seconde racine sera $5 - 2x$. Le quarré de $3 + x$ est $9 + 6x + xx$; celui de $5 - 2x$ est $25 - 20x + 4xx$. Ces deux quarrez ajoutez ensemble font $34 - 14x + 5xx$ qui sont égaux à 34; ainsi on a cette équation $34 - 14x + 5xx = 34$. J'ajoute $14x$ de part & d'autre, $34 + 5xx = 34 + 14x$. Je retranche 34, j'ai $5xx = 14x$; je divise par x, & j'ai $5x = 14$. Je divise par 5, & il vient $x = \frac{14}{5}$. La premiere racine est $3 + \frac{14}{5}$. La seconde est $5 - \frac{28}{5}$ qui corrigée est $\frac{3}{5}$. Le quarré de la premiere est $33\frac{16}{25}$. Celui de la seconde $\frac{9}{25}$; & les deux font 34.

Voilà quelques exemples de Problêmes indéterminez sur des grandeurs rationnelles; c'est-à-dire qui se peuvent exprimer par nombres. Comme il est libre entre les grandeurs dont la valeur n'est point déterminée, d'en supposer une telle qu'on le veut choisir; ces Problêmes sont capables de plusieurs differentes résolutions. Prenez garde aux méthodes, qui étant bien entendues découvrent le moyen de résoudre une infinité de Problêmes sur les nombres.

Probleme Trente-unieme.

Trouver deux grandeurs commensurables, & telles que leur somme, & celle de leurs quarrez, ayent un même rapport que deux grandeurs connues.

a & *b* sont les grandeurs connues. Je nomme z la premiere des inconnues, & zy la seconde

conde. Prenez garde à cette expreſſion. Dans les Problêmes précédens on a marqué chaque inconnue par une ſeule lettre. Selon que la queſtion eſt propoſée, $z+zy$ la ſomme des deux inconnues, eſt à $zz+zzyy$, la ſomme de leurs quarrez, comme a eſt à b, ainſi le produit des extrêmes de cette proportion $z+zy$ & b eſt égal au produit des moyens a & $zz+zzyy$. Donc,

$$bz+bzy=azz+azzyy.$$

Je diviſe les deux membres de cette équation par $az+azyy$, & après la correction vient

$$z=\frac{b+by}{a+ayy}.$$

Si je ſuppoſe que $y=2$, donc $z=\frac{b+2b}{a+4a}$; & ſi $a=1$, & $b=10$, donc $z=6$. Ainſi $zy=12$. Or $z+zy$ ou $6+12$ eſt à $zz+zzyy$ ou $36+144$, comme a eſt à b, c'eſt-à-dire 18. 180 :: 1. 10. Voilà donc la queſtion réſolue. On auroit trouvé d'autres nombres, ſi on avoit ſuppoſé y égal à une autre valeur que ce nombre 2.

PROBLEME TRENTE-DEUXIEME.

Couper un quarré déterminé en deux quarrez parfaits.

Soit a le côté du quarré connu, & z celui du premier inconnu qu'on cherche, & x le côté du ſecond. Ainſi voilà ce qu'on cherche $aa=zz+xx$. Il eſt évident que x & z ſont chacun moindre que a. Prenons $a-zy$ ou $zy-a$ pour x. Ainſi au lieu de l'équation précédente on aura $aa=zz+aa+zzyy-2azy$, qu'on peut réduire par les voies ordinaires à celle-ci, $2azy=zz+zzyy$.

Divisant de part & d'autre par z vient $2ay = z + zyy$, ou $2ay = 1z + 1zyy$. Je divise l'un & l'autre membre par $1 + yy$, & j'ai $\frac{2ay}{1+yy} = z$. Donc supposant $y = 2$ & $a = 10$, alors $2ay = 40$ & $1 + yy = 1 + 4$. Ainsi $z = \frac{2ay}{1+yy} = 8$ & $zy = 16$ & $zy - a = 6$. Donc $x = 6$ & $xx + zz$ ou $36 + 64 = 100 = aa$. Il faut toujours supposer y plus grand que l'unité.

Probleme Trente-troisieme.

Diviser la somme de deux quarrez parfaits en deux autres parfaits.

Soit a le côté du plus grand des quarrez connus, & b celui du plus petit. Le côté d'un deux inconnus sera moindre nécessairement que le côté a, & l'autre par conséquent plus grand que le petit côté b. Nommons donc $a - z$ celui des côtez inconnus, qui vaut moins que le côté connu a; & nommant ensuite $yz - b$ l'autre côté qui doit surpasser b, les quarrez de ces deux côtez seront $aa - 2az + zz$ & $yyzz - 2byz + bb$. Et leur somme égalera la somme connue $aa + bb$. Ce qui donnera une équation qui se réduit à celle-ci.

$$zz + yyzz = 2az + 2byz.$$

Divisant cette équation par z, vient

$$z + yyz = 2a + 2by.$$

Or $z + yyz = 1z + yyz$. Divisant donc l'équation précédente par $1 + yy$, reste $z = \frac{2a + 2by}{1+yy}$.

Ainsi

Ainſi ſi $a=3, b=2$, & qu'on ſuppoſe que $y=2$; donc $z=\frac{6+8}{1+4}=\frac{14}{5}$. On trouvera de cette maniere une réſolution de la queſtion, qui en peut recevoir une infinité d'autres.

Equation & Egalité c'eſt une même choſe. On ſe ſert plus ſouvent du premier nom; & on n'employe le ſecond que lors qu'il s'agit de Problêmes numeriques, qu'on diſtingue en Problêmes de double, de triple égalité, ſelon le nombre des égalitez qu'il faut trouver pour les réſoudre. On definit ainſi ces égalitez. On nomme double égalité, la comparaiſon de deux grandeurs qui renferment une même inconnue, à deux divers quarrez qui ſont inconnus. Comme, s'il faut découvrir deux quarrez, dont l'un ſoit égal à une grandeur a z, *& l'autre à une grandeur* b z, *enſorte que l'inconnue* z *de la grandeur* a z *ſoit la même* z *qui eſt inconnue dans* b z. *Et s'il falloit découvrir de la même ſorte deux quarrez dont l'un fût égal à une grandeur* a z + 6, *& l'autre à une autre grandeur* b z + d. *Mais s'il y avoit trois diverſes grandeurs, dont chacune renfermât une même inconnue, & qu'il fallût égaler chacune à un quarré; on diroit que c'eſt une triple égalité. Voilà un Problême de double égalité.*

PROBLEME VINGT-QUATRIEME.

Trouver une grandeur, laquelle étant multipliée par deux grandeurs connues, donne deux produits qui ſoient chacun un quarré parfait.

Ayant nommé *a* & *b* les deux grandeurs connues, & z l'inconnue qui les multiplie; le premier plan *a z* ſera égal à un quarré *yy*. Ainſi $az=yy$. Diviſant par *a* cette équation, vien-

viendra $z = \frac{yy}{a}$. Le second plan bz sera égal à un quarré xx. Ainsi $bz = xx$ & $z = \frac{xx}{b}$. Partant $\frac{xx}{b} = \frac{yy}{a}$, & multipliant de part & d'autre par b, on aura le quarré $xx = \frac{byy}{a}$, dont prenant la racine on aura $x = \frac{y\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$. De sorte que pour trouver une résolution où les grandeurs soient toutes commensurables, il est nécessaire que les grandeurs connues a & b soient telles que la grandeur $\sqrt{\frac{b}{a}}$ soit un quarré parfait, ou que les grandeurs 4 & b soient deux plans semblables. Soit $a = 6$ $b = 54$. Ainsi $\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{9}$. Comme y est arbitraire, supposé que $y = 8$. Alors $x = 24$ & $z = \frac{1}{3}^2$ & az ou $6z = 64$ & bz ou $54z = 576$.

Ainsi on a trouvé ce que l'on cherchoit, c'est-à-dire z une grandeur qui multipliée par a & par b donne deux produits, qui sont deux quarrez parfaits. Vous pouvez voir que cette liberté qu'on a de choisir ou de supposer des grandeurs telles qu'on le veut, est ce qui rend souvent la résolution des Problêmes indéterminez très difficile, quand il s'agit de trouver des nombres ou quarrez, ou cubes. Cela demande un grand tems qui n'est pas entierement perdu, parce que cela peut exercer l'esprit, & qu'on y trouve un amusement agréable quand on aime les questions numeri-

ques

ques. Mais comme je ne dois pas groſſir ces Elémens, je ne propoſerai pas d'autres ſemblables Problêmes. J'ai tiré ces quatre derniers, des Elémens du Pere Preſtet de l'Oratoire, qui en propoſe un grand nombre. La réſolution de ceux-ci donnera une entrée dans ce que cet Auteur a écrit touchant la réſolution des Problêmes indéterminez.

CHAPITRE VII.

De la nature des Equations, de leurs differens degrez, & des préparations néceſſaires pour les réſoudre.

DAns les Problêmes qu'on vient de propoſer on a réduit toutes les grandeurs inconnues à une ſeule, qu'on fait paſſer dans un des membres de l'équation, la délivrant de toute autre grandeur, de maniere que ſe trouvant égale à une ou pluſieurs grandeurs connues, elle n'eſt plus inconnue. Il y a des Problêmes plus compoſez, dans leſquels après toutes les réductions qui ont été expliquées, c'eſt le quarré, ou le cube, ou le quarré de quarré de la lettre qui marque l'inconnue; par exemple ou z^2, ou z^3, ou z^4, qui eſt dans l'un des membres de l'équation, & dans l'autre ſe trouve la grandeur inconnue z mêlée avec d'autres grandeurs: de ſorte que le Problême n'eſt pas réſolu, puis qu'on ne connoit pas la valeur préciſe de z. Quand cela arrive, l'équation n'eſt pas ſimple comme celles que nous avons vues juſqu'à preſent, elle eſt compoſée. C'eſt de la nature de ces équations

tions compoſées, que nous allons parler dans ce Chapitre, ſeulement pour en donner une idée, car pour en donner une pleine connoiſſance il faudroit un Ouvrage fait exprès; & ce n'eſt ici que des Elémens pour ceux qui commencent.

I.

Les Equations ſont dites d'un ou de pluſieurs degrez, ſelon le degré où la grandeur inconnue eſt élevée.

Conſiderez ces Equations, où l'inconnue eſt z élevée à differens degrez.

$$z = b$$
$$z^2 = -az + bb$$
$$z^3 = +az^2 + bbz - c^3$$
$$z^4 = az^3 - c^3z + d^4.$$

Dans la premiere de ces Equations, la grandeur inconnue z eſt égale à b: Dans la ſeconde, le quarré de z eſt égal au quarré de b moins a multiplié par z. Dans la troiſieme, le cube de z eſt égal à a multiplié par le quarré de z, plus le quarré de b multiplié par z, moins le cube de c. Enfin dans la quatrieme, le quarré de quarré de z eſt égal à a multiplié par le cube de z moins le cube de c multiplié par z, plus le quarré de quarré de d. &c. Ces Equations ſont compoſées, & à la reſerve de la premiere, les autres ne font pas découvrir la juſte valeur de l'inconnue. Or ces Equations reçoivent differens noms, ſelon la puiſſance à laquelle la grandeur inconnue eſt élevée. Une Equation eſt du premier degré, ſi l'inconnue eſt une grandeur linéaire, ou ſi elle eſt dans le premier degré, comme eſt la premiere de ces Equations $z = b$. Elle eſt du ſecond degré, ſi cette inconnue eſt

un

un quarré; du troiſieme, ſi c'eſt un cube; du quatrieme, ſi l'inconnue eſt élevée à la quatrieme puiſſance. Ainſi de toutes les autres Equations qui prennent leur nom des degrez de l'inconnue.

On reconnoitra dans la ſuite, que pour mieux expliquer la nature des Equations, & pour les réſoudre, il eſt bon de faire paſſer dans le premier membre tout ce qui eſt dans le ſecond, égalant toute l'Equation à zero, ce qui ſe fait en changeant les ſignes, c'eſt-à-dire en joignant les deux membres par le ſigne + ou − ſelon que l'inconnue eſt une grandeur poſitive ou négative; & mettant zero dans le ſecond membre après le ſigne de l'égalité. Il eſt évident que ſi $z=b$, ôtant b de z il ne doit rien reſter; c'eſt-à-dire qu'en retranchant d'une grandeur ſa valeur entiere, on l'égale à zero. Si $z=b$, donc $z-b=0$.

Lors qu'une grandeur eſt négative, elle eſt moins que rien. Ainſi ſi z eſt négatif, & qu'il s'en faille b qu'il ne ſoit égal à rien: que $z=0-b$, alors pour faire paſſer b dans le premier membre, il faut le joindre avec +. Car dans ce cas, afin que z ſoit égal à zero, il eſt évident qu'il faut lui ajouter b, par conſéquent $z+b=0$. Voilà donc la règle générale: Si la grandeur inconnue qui eſt ſeule dans le premier membre eſt poſitive, le premier membre moins le ſecond eſt égal à zero: Si cette inconnue eſt négative, le premier membre plus le ſecond eſt égal à zero. Au reſte, quand on fait paſſer le ſecond membre dans le premier, on change les ſignes, c'eſt-à-dire le + en −, & le − en +. Ainſi ſi $z^2=-pz+q$, on écrit $z^2+pz-q=0$. Si $z^2=+pz-q$, on écrit $z^2-pz+q=0$.

II.

Des differens termes d'une Equation. Qu'eſt-ce qu'on appelle terme d'une Equation? Tous ces termes ne paroiſſent pas toujours.

Après qu'on a fait paſſer d'un côté toutes les grandeurs d'une Equation, qu'ainſi le ſecond membre eſt égal à zero, on voit que dans le premier lieu du premier membre la grandeur inconnue y eſt dans le degré qui donne le nom à l'équation; que c'eſt ou une quatrieme, ou une troiſieme, ou une ſeconde puiſſance, & qu'elle deſcend enſuite; comme ici dans cette Equation du quatrieme degré.

$$\underset{A}{x^4} - \underset{B}{4x^3} - \underset{C}{19x^2} + \underset{D}{106x} - \underset{E}{120} = 0$$

Faites attention aux parties du premier membre de cette Equation. L'inconnue x qui eſt dans la premiere partie A, y eſt élevée juſques au quatrieme degré, & elle deſcend dans les autres parties; car dans la ſeconde partie B, elle eſt abaiſſée au troiſieme degré. En C elle eſt deſcendue au ſecond, & en D juſqu'au premier.

Ces parties ſont ce qu'on appelle les termes d'une Equation; qui ſe nomment premiers, ſeconds, troiſiemes, ſelon que l'inconnue deſcend, & a moins de dimenſions. La derniere partie E, où x la grandeur inconnue ne ſe trouve point, ſe nomme le dernier terme. Le premier c'eſt celui dans lequel l'inconnue eſt dans le degré qui donne le nom à l'équation; x^4 qui eſt dans la premiere place A, eſt le premier terme, & 120 qui eſt dans la derniere place E, eſt le dernier terme. On dit qu'une Equation eſt ordonnée, quand il y a de l'ordre en ſes termes: que la

plus

plus haute puiſſance de l'inconnue en eſt le premier terme, & que les autres puiſſances de ſuite de la même inconnue en ſont les autres termes ſelon leurs degrez. Ainſi cette Equation eſt ordonnée:

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0.$$

On ne compte que pour un terme, deux ou pluſieurs grandeurs qui ſont mêlées avec le même degré de l'inconnue, ou dans lequel deux ou pluſieurs grandeurs connues ſe trouvent avec le même degré de l'inconnue. Ainſi $bx + cx$ ou $bx - cx$ ne peuvent faire qu'un terme, car il n'y a qu'à corriger leur expreſſion, prenant par exemple d qui ſoit égal à $b + c$; ainſi au lieu de $bx + cx$, écrivant dx. Si on ne fait pas cette réduction, il faut écrire dans une même colomne où l'un ſous l'autre tout ce qui ne peut faire qu'un terme. Ainſi avant la réduction il faudroit écrire

$+bx$
$+cx$.

Conſiderons encore ici comment pour faire ces réductions on peut changer une expreſſion dans une autre, un quarré dans un plan, un plan dans un quarré. Si au lieu de aa on veut avoir un plan égal, ayant pris à diſcretion une grandeur plus petite ou plus grande que a; il faut en trouver une ſeconde, telle qu'entre ces deux, a ſoit un moyen proportionnel. Si c'eſt m & n, & qu'ainſi $\frac{m}{a} = \frac{a}{n}$. il eſt évident que $mn = aa$. Si on vouloit donc changer le plan mn dans un quarré de même valeur, il faudroit trouver un moyen proportionnel entre m & n.

Les termes d'une Equation ſont complexes ou incomplexes, ſelon que leur expreſſion eſt ſimple

ſimple ou compoſée. Un terme comme celui-ci $+bx+cx$ qui n'en fait qu'un, eſt complexe. Si on le changeoit, & qu'ayant pris d égal à $b+c$, on fît $dx=bx+cx$, ce terme dx ſeroit incomplexe. Autant qu'on le peut, il faut faire enſorte que les termes d'une Equation deviennent incomplexes s'ils ne le ſont pas. Ainſi dans cette Equation dont le dernier terme eſt complexe,

$$xx-ax+bb-cc=0,$$

il faut pour le rendre incomplexe ſuppoſer $bb-cc=dd$, & au lieu de $bb-cc$, écrire dd qui eſt un terme incomplexe. De même dans cette Equation,

$$xx=\frac{aax+ccd}{a-b},$$

ou dans celle-ci qui eſt la même choſe,

$$xx=\frac{aax}{a-b}+\frac{ccd}{a-b},$$

diviſant aa par $a-b$ qui ſont des grandeurs connues, & nommant g le quotient de cette diviſion; diviſant de même ccd par $a-b$, & nommant bb le quotient de cette diviſion, j'aurai cette expreſſion $xx=gx+bb$, où le ſecond & le dernier terme ſont incomplexes. C'eſt par le moyen de ces réductions & corrections qu'on réduit les Equations de chaque degré à de certaines formules, dans leſquelles la grandeur inconnue ſe trouve ſeule dans le premier terme; comme celle qui eſt connue ſe trouve toute ſeule dans le dernier. Dans les autres termes on appelle *coëfficiens* ou grandeurs *coëfficientes*, celles qui ſe trouvent mêlées avec les grandeurs qui compoſent ces termes, comme dans les termes B, C, D, de l'Equation précédente, les chiffres 4. 19. 106, ſont des grandeurs *coëfficientes*. Il eſt bon

bon de se souvenir que lors qu'on éleve une grandeur complexe ou un Binome, à quelque degré qu'on l'éleve, tous les termes dont elle sera composée sont en proportion après qu'on en a ôté les nombres coëfficiens; car par exemple, le produit de $a+b$ par $a+b$ est $aa+2ab+bb$; ôtez ce nombre 2 qui est dans le second membre, & qui est coëfficient, alors $\div aa.ab.bb$.

Il y a des Equations dont tous les termes ne paroissent pas, comme en celle-ci, qui n'a point de second terme.

$$x^2 \ldots bb = 0.$$

Cela arrive lors que la même valeur se trouve avec des signes contraires qui se détruisent; ainsi on la supprime en corrigeant les expressions. Par exemple dans celle-ci, dont les racines sont $x-a$ & $x+a$; c'est-à-dire qui est faite de la multiplication de $x-a$ par $x+a$.

$$xx+ax-ax+aa=0.$$

pour corriger l'expression je supprime $+ax-ax$, qui ont des signes qui se détruisent, après quoi il n'y a plus de second terme.

$$xx \ldots +aa=0.$$

III.

Des Racines d'une Equation.

On nomme racines d'une Equation, les valeurs de l'inconnue, par la multiplication desquelles une Equation a été composée. Ainsi, si on suppose $x=2$ ou $x-2=0$ & $x=3$ ou $x-3=0$, & qu'on multiplie $x-2$ par $x-3$, on aura cette Equation $xx-2x-3x+6=0$, qui étant corrigée deviendra

$$xx-5x+6=0, \text{ ou } xx=5x-6.$$

Les racines de cette Equation sont $x-2$ & $x-3$. Que si derechef on suppose $x-4=0$, & qu'on multiplie la précédente Equation $xx-fx$

$+$

$+ 6 = 0$, par cette racine, on aura cette Equation :

$$x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0$$

dont les trois racines ſont 2, 3, 4, qui ſont les differentes valeurs. Ce n'eſt pas que dans la réſolution d'un Problême, on puiſſe ſuppoſer qu'une même grandeur ait differentes valeurs ; mais c'eſt qu'on appelle racine d'une Equation, les grandeurs par la multiplication deſquelles elle peut être formée ; & que celle par exemple qu'on vient de propoſer, ſe peut concevoir comme étant formée de ces trois racines $x - 2 = 0$. $x - 3 = 0$. $x - 4 = 0$.

Ces racines ſont nommées vraies ou fauſſes, ſelon qu'elles expriment des grandeurs réelles & poſitives, ou des grandeurs négatives, c'eſt-à-dire moindres que zero.

Le degré où l'inconnue eſt élevée fait connoître combien l'Equation a de racines ; & les ſignes $+$ & $-$ font appercevoir quand elles ſont vraies ou fauſſes.

Dans une Equation qui a pluſieurs racines, comme dans celle-ci,

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$$

dont les racines ſont 2. 3. 4. qui ſont vraies ou poſitives, la grandeur connue 9 qui eſt au ſecond terme $9x^2$ eſt égale à la ſomme de toutes ces racines, $2 + 3 + 4 = 9$. La grandeur connue du troiſieme terme $26x$ eſt égale à la ſomme des produits de ces racines priſes deux à deux, c'eſt-à-dire aux produits, 1°. de 2 & de 3, ce qui fait 6 ; 2°. de 2 & de 4 qui fait 8 ; 3°. de 3 & de 4, c'eſt-à-dire à 12. Ces produits ſont 26. La grandeur du dernier terme qui eſt entierement connue eſt égale à 6 produit de la premiere & de la ſeconde, multiplié par la troiſieme 4, ce qui fait 24.

Cela

Cela se reconnoit en composant cette Equation, c'est-à-dire en multipliant ses racines.

Il est évident qu'une Equation qui contient plusieurs racines peut être divisée par un binome composé de l'inconnue moins la valeur de l'une des racines vraies, laquelle que ce soit, ou plus la valeur de l'une des fausses, au moyen de quoi on diminue d'autant ses dimensions. Réciproquement, si la somme d'une Equation ne peut être divisée par un binome composé de l'inconnue $+$ ou $-$ quelque autre grandeur, c'est une marque que cette autre grandeur n'est point la valeur d'aucune de ses racines. Cette Equation, par exemple, peut être divisée par $x-2$

$$x^4-4x^3+19x^2+106x-120=0$$

& par $x-3$ & par $x-4$ & par $x+5$, mais non point par $x+$ ou $-$ aucune autre grandeur; ce qui montre qu'elle ne peut avoir que les quatre racines 2, 3, 4 & 5.

Les racines d'une Equation sont, comme on vient de le dire, ou vraies ou fausses. Elles sont encore ou réelles ou imaginaires. C'est ce qu'il faut expliquer; rendre raison pourquoi il y a des racines imaginaires, & montrer qu'elles sont d'usage.

Nous avons vu & demontré que *moins en moins* donne *plus*; ainsi il ne se peut pas faire que la racine quarrée de $-aa$ soit une grandeur réelle; car le produit de $-a$ par $-a$ c'est $+aa$, comme on l'a vu Liv. I. n. 36 & 37. Ainsi $\sqrt{-aa}$ c'est une racine imaginaire, c'est-à-dire qu'elle n'est point réelle, puis que $-aa$ ne peut être le produit de $-a$. Car $-a$ par $-a$ fait $+aa$. Cependant il y a des occasions où l'on rencontre de ces racines imaginaires dont on peut faire usage, comme on le fait des quatriemes, cin-

cinquiemes, ſixiemes puiſſances, quoiqu'il n'y ait point de puiſſance dans la Nature au deſſus de la troiſieme, qui eſt le cube.

IV.

On peut augmenter & diminuer, multiplier & diviſer les racines d'une Equation ſans les connoitre.

Sans connoitre la valeur des racines d'une Equation, on les peut augmenter ou diminuer de quelque grandeur connue. Il ne faut pour cela qu'au lieu du terme inconnu en ſuppoſer un autre qui ſoit plus ou moins grand de cette même grandeur connue, & le ſubſtituer par-tout en la place du premier. Comme ſi on veut augmenter de 3 la racine de cette Equation,

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0,$$

il faut prendre y au lieu de x, & penſer que cette grandeur y eſt plus grande que x de 3, en ſorte que $y - 3$ eſt égal à x; & au lieu de x^2 il faut mettre le quarré de $y - 3$ qui eſt $y^2 - 6y + 9$; & au lieu de x^3 il faut mettre ſon cube qui eſt $y^3 - 9y^2 + 27y - 27$; & enfin au lieu de x^4 il faut mettre ſon quarré de quarré qui eſt $y^4 - 12y^3 + 54y^2 - 108y + 81$. Ainſi décrivant l'Equation ci-deſſus, & ſubſtituant par-tout y au lieu de x, on a l'Equation ſuivante, laquelle ſe trouve corrigée au deſſous de la ligne comme vous voyez.

$$\begin{array}{r} y^4 - 12y^3 + 54y^2 - 108y + 81 \\ -4y^3 + 36y^2 - 108y + 108 \\ -19y^2 + 114y - 171 \\ +106y - 218 \\ -120 \end{array}$$

$$y^4 - 16y^3 + 71y^2 + 4y - 420 = 0$$

La racine vraie qui étoit 5 eſt maintenant 8, à cauſe du nombre 3 qui lui eſt ajouté.

Que

Que si au contraire on veut diminuer de 3 la racine de cette même Equation, il faut faire $y + 3 = x$ & $y^2 + 6y + 9 = x^2$, & ainsi des autres; de façon qu'au lieu de

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

on met

$$\begin{aligned} y^4 + 12y^3 + 54y^2 + 108y + 81 \\ - 4y^3 - 36y^2 - 108y - 108 \\ - 19y^2 - 114y - 171 \\ + 106y + 318 \\ - 120 \end{aligned}$$

$$y^4 + 8y^3 - 1y^2 - 8y^1 = 0$$

En augmentant les vraies racines d'une Equation, il est évident qu'on en diminue les fausses, & au contraire en diminuant les vraies, on augmente les fausses. Je copie Descartes, mais je passe ce que je ne crois pas si nécessaire ici.

On peut de même sans connoitre la valeur des racines d'une Equation, les multiplier, ou diviser toutes par telle grandeur connue qu'on veut; ce qui se fait en supposant que la grandeur inconnue étant multipliée ou divisée par celle qui doit multiplier ou diviser les racines, est égale à quelque autre. Ensuite multipliant ou divisant la grandeur connue du second terme par celle qui doit multiplier ou diviser les racines, & par son quarré celle du troisieme, & par son cube celle du quatrieme, & ainsi jusqu'au dernier. Ce qui peut servir pour réduire à des nombres entiers & rationaux les fractions, & souvent aussi les nombres sourds, qui se trouvent dans les termes des Equations. Comme si on a cette Equation:

$$x^3 - xx\sqrt{3} + \frac{26}{27} - \frac{8}{27\sqrt{3}} = 0$$

& qu'on veuille en avoir une autre en ſa place, dont tous les termes s'expriment par des nombres rationaux; il faut ſuppoſer $y = x\sqrt{3}$, & multiplier par $\sqrt{3}$ la grandeur connue du ſecond terme qui eſt auſſi $\sqrt{3}$, & par ſon quarré qui eſt 3, celle du troiſieme terme qui eſt $\frac{4}{27}$, & par ſon cube qui eſt $3\sqrt{3}$ celle du dernier, qui eſt $\frac{8}{27\sqrt{3}}$ ce qui fait

$$y^3 - 3yy + \tfrac{4}{9}y - \tfrac{8}{9} = 0.$$

Après cela ſi on en veut avoir encore une autre en la place de celle-ci, dont les grandeurs connues ne s'expriment que par des nombres entiers, il faut ſuppoſer que $z = 3y$, & multipliant 3 par 3, $\frac{4}{9}$ par 9, & $\frac{8}{9}$ par 27, on trouve

$$z^3 - 9z^2 + 26z - 24 = 0$$

où les racines étant 2, 3 & 4, on connoit de là que celles de l'autre d'auparavant étoient $\frac{2}{3}$, 1 & $\frac{4}{3}$ & que celles de la premiere étoient $\frac{2}{3}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, & $\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

V.

Règle générale pour faire évanouïr le ſecond terme d'une Equation.

Puiſque + une grandeur − cette même grandeur = 0; donc pour faire évanouïr le ſecond terme d'une Equation propoſée, il faut, ſi l'on peut, ſubſtituer quelques grandeurs qui faſſent que le ſecond terme de l'Equation propoſée ſe trouve affecté du ſigne + & du ſigne −, ce qui le détruira entierement, comme il eſt évident. Or pour cela il faut ajouter ou ôter des racines, ſelon la diverſité de leurs ſignes + & −, la grandeur connue qui ſe trouve au ſecond terme après qu'on l'aura diviſée par l'expoſant de la puiſſance du premier: & ſubſtituant

cette

cette valeur dans l'Equation autant que faire se pourra, le second terme après les opérations faites ne s'y trouvera plus. Des exemples éclairciront cette règle.

Exemple pour le second Degré.

Soit cette Equation dont il faille ôter le second terme $xx - px + q = o$. L'on prendra selon la Règle $x - \frac{1}{2}p = y$; donc $x = y + \frac{1}{2}p$, & $xx = yy + py + \frac{1}{4}pp$; cette Equation est pour le premier terme; celle du second sera $-px = -py - \frac{1}{2}pp$. Donc $xx - px + q = yy + py + \frac{1}{4}pp + q - py - \frac{1}{2}pp = o$,

& ôtant les termes qui se détruisent, il viendra enfin $yy^* - \frac{1}{4}pp + q = o$, où l'on voit que le second terme est évanouï.

Si l'Equation proposée eût eu le signe $+$ au second terme, on auroit pris $x + \frac{1}{2}p = y$, & l'on auroit trouvé la même égalité résultante, n'ayant de difference que dans les signes.

Exemple pour le troisieme Degré.

Soit cette Equation $x^3 - pxx + qx + r = o$ dont on veut faire évanouïr le second terme; comme l'exposant du premier est 3, il faut selon la Règle prendre $x - \frac{1}{3}p = y$, donc $x = y + \frac{1}{3}p$; & $x^3 = y^3 + pyy + \frac{1}{3}ppy + \frac{1}{27}p^3$: de même $-pxx = -pyy - \frac{2}{3}ppy - \frac{1}{9}p^3$, & $qx = qy + \frac{1}{3}pq$. L'on aura donc $x^3 - pxx + qx + r = y^3 + pyy + \frac{1}{3}ppy + \frac{1}{27}p^3 + qy + \frac{1}{3}pq + r - pyy - \frac{2}{3}ppy - \frac{1}{9}p^3 = o$

Et effaçant les termes qui se détruisent, il viendra enfin cette Equation, qui n'aura plus de second terme $y^4 * - \frac{1}{3} ppy - \frac{2}{27} p^3 + qy + \frac{1}{3} pq + r = 0$.

Si l'égalité avoit eu le signe plus au 2e terme, l'on auroit supposé $x + \frac{1}{3} p = y$.

Il en est de même pour le quatrieme degré, n'y ayant de difficulté que la longueur du calcul.

Cette Règle est la même que celle que M. Descartes donne dans sa Géometrie, lors qu'il dit que pour faire évanouïr le second terme d'une Equation, il faut retrancher des vraies racines la quantité connue de ce second terme divisée par le nombre des dimensions du premier, si l'un de ces deux termes ayant le signe + l'autre a le signe −; ou bien les augmenter de la même grandeur, s'ils ont tous deux le signe + ou tous deux le signe −, & c'est ce que nous avons fait; car pour les Equations du second degré, nous avons pris la moitié de p, c'est-à-dire que nous avons divisé p par 2, qui marquoit les dimensions de l'inconnue x^2. Le nombre 3 marque les dimensions du troisieme degré. Aussi dans le second exemple nous avons pris le tiers de p, ce qui est diviser p par 3. Pour ôter le second terme de cette Equation de quatre degrez,

$$y^4 + 16y^3 + 71y^2 - 4y - 420 = 0$$

ayant divisé 16 par 4 à cause des quatre dimensions du premier terme y^4, il vient de-

rechef 4; c'eſt pourquoi je fais $z-4=y$, & j'écris

$$z^4-16z^3+96z^2-256z+256$$
$$+16z^3-192z^2+768z-1024$$
$$+71z^2-568z+1136$$
$$-4z+16$$
$$-420$$

$$z^4 * -25z^2-60z-36=0$$

Le ſecond terme eſt évanouï, ou il ne doit plus paroître, parce que $-16z^3+16z^3=0$.

Ainſi pour faire évanouïr le ſecond terme d'une Equation du quatrieme degré, il faut augmenter cette Equation de — le quart de la grandeur connue du ſecond terme (ou du nombre coëfficient, comme nous avons vû que ce mot ſe prenoit) ſi ce ſecond terme a le ſigne +; ou + le même quart, ſi ce terme a le ſigne —.

CHAPITRE VIII.

De la réſolution des Equations compoſées, ou moyen de réſoudre les Problêmes du ſecond, du troiſieme & du quatrieme Degré.

LEs Problêmes prennent leur nom des degrez des Equations que l'on trouve en les examinant. On réduit, comme on l'a vu, à un certain degré les Equations. C'eſt de ce degré qu'un Problême prend ſon nom. Si l'Equation n'a qu'un degré, il ſe nomme *li-*

néaire ou d'un degré. Si l'Equation eſt du ſecond degré, le Problême s'appelle *plan* ou du ſecond degré. Si l'Equation a trois degrez, le Problême eſt *ſolide* ou de trois degrez. Enfin on dit qu'il eſt du quatrieme degré *plus que ſolide*, ſi l'Equation a quatre degrez. Les Problêmes linéaires ou du premier degré, ſe réſolvent comme nous avons vu. Quand l'inconnue ſe trouve ſeule dans l'un des membres, & que l'autre n'a que des grandeurs connues, la valeur de cette inconnue ne peut plus être inconnue. Tous les Problêmes du Chapitre ſixieme ſont du premier degré. Parlons maintenant des autres Problêmes.

I.

Les termes d'une Equation de pluſieurs degrez ſe réſolvent en proportion.

Les Equations d'un même degré ſe réduiſent à un certain nombre de formules, & toutes ces formules ſe peuvent réduire en proportion qui fait connoître de quoi il s'agit pour réſoudre un Problême. C'eſt ce qu'il faut conſiderer. On appelle Equation pure, celle où l'inconnue n'eſt point mêlée avec les inconnues, comme celle-ci $xx - ab = 0$. Quand cela n'eſt pas ainſi, on dit qu'elle eſt affectée. Cette Equation pure $xx - ab = 0$ ſe change en cette proportion $\div a. x. b.$ car $ab = xx$. Ainſi pour réſoudre cette Equation, il s'agit de trouver entre deux grandeurs données une moyenne proportionnelle, qui ſera la racine de cette Equation ou la valeur de la grandeur inconnue x. Cette Equation affectée $xx - ax - bc = 0$ ſe réſout en cette proportion $x. b. :: c. x - a$; ce qui fait connoître

noitre que pour réſoudre entierement l'Equation, il faut trouver quatre grandeurs proportionnelles, dont les deux moyennes ſoient données, auſſi bien que l'excès de la premiere ſur la quatrieme. Or toutes les queſtions qu'on peut faire ſur la maniere de trouver ces proportionnelles, ſe réſolvent aiſément, exprimant deux grandeurs inconnues dont la difference eſt connue, en la maniere qu'on l'a expliqué, *ſup.* n. 23. Soit $\div y.b.z$, & que la difference de y & de z ſoit 8. Il faut ſuppoſer que x eſt la moitié de $y+z$. Ainſi ſi y eſt plus petit que z, alors $x-4=y$ & $x+4=z$. Partant $\div y.b.z$. & $\div x-4.b.x+4$ ſont une même choſe. Le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens, ainſi $xx+4x-4x-16=bb$, où vous voyez que les ſignes contraires ſe faiſant évanouir l'un l'autre, l'Equation devient $xx-16=bb$, ou $xx=bb+16$, qui eſt une Equation pure, & partant facile à réſoudre.

Toutes les Equations de trois, de quatre, & de pluſieurs autres degrez, ſoit qu'elles ſoient pures, ſoit qu'elles ſoient affectées, ſe réſolvent en proportion; ce qui ne ſe pouvant expliquer en peu de paroles, je propoſerai une voye plus courte pour réſoudre les Equations. De quelque degré que ſoit une Equation, quand elle eſt pure, elle ſe réſout aiſément. Pour réſoudre celle-ci $x^7=ab$, il ne s'agit que de tirer la racine quarrée de ab. Mais ſi ab n'eſt pas un nombre quarré, on ne peut pas exprimer en nombre la valeur de x. Pour réſoudre cette Equation $x^3=aab$ qui eſt pure, il faut tirer la racine cube de aab; ainſi des autres degrez ou puiſſances. Il ne

s'agit donc que de la réſolution des Equations affectées.

II.

Des differentes formules des Equations du ſecond Degré, & de leur proprieté : ce que c'eſt que Formule.

Les Equations d'un même degré ſe réduiſent donc, comme nous l'avons dit, à un certain nombre de formules, qui ſont differentes, parce que leurs racines peuvent avoir differens ſignes. Pour entendre ceci, il faut ſavoir que lors qu'une Equation eſt corrigée & abregée, cela s'appelle *une formule*; c'eſt-à-dire une expreſſion générale ou abregée de toutes les Equations du même degré, qui ont le même nombre de termes, & la même diverſité dans leurs ſignes. Or les Equations du ſecond degré ont ces quatre formules.

$$z^2 = pz + q \qquad z^2 - pz - q = 0$$
$$z^2 = pz - q \qquad z^2 - pz + q = 0$$
$$z^2 = -pz + q \text{ ou } z^2 + pz - q = 0$$
$$z^2 = -pz - q \qquad z^2 + pz + q = 0$$

La raiſon de ces quatre formules, c'eſt que ſi la grandeur inconnue eſt négative, ſes racines feront ou $-p-q$ ou $p+q$, ce qui fait deux cas. Si elle eſt poſitive, cela fait encore deux autres cas; car ces racines feront pareillement ou $+p+q$ ou $+p-q$. Je ſuppoſe dans la ſuite du Chapitre, que la grandeur connue du ſecond terme eſt p, & que celle du dernier terme qui eſt toujours connu ſoit q. Les deux Théorêmes ſuivans contiennent le fondement de ce que l'on dira touchant la réſolution des Equations de deux degrez.

THEO-

THEOREME PREMIER.

Si $z = p + x$ *ou* $z = p - x$, *le quarré* zz *de la grandeur entiere* z *est égal au plan fait de la partie* p, *& de la toute* z, *moins ou plus le plan de* zx.

En multipliant $z = p + x$ par z, vient l'Equation $zz = pz + xz$; comme en multipliant $z = p - x$ par z, vient $zz = pz - xz$; ce qui fait voir à l'œil la verité de ce Théorême, sans qu'il soit besoin d'autre démonstration.

COROLLAIRE.

pz *étant le second terme, le plan* xz *est la valeur du dernier terme*; *ainsi* $xz = q$.

Nous supposons que $z^2 = pz + q$. Par conséquent, puis que selon ce Théorême $z^2 = pz + xz$, il faut que $xz = q$.

THEOREME SECOND.

z *est égal à la moitié de* p, *plus ou moins la racine quarrée de* $\frac{1}{4}pp + q$.

Soit m moitié de p, donc $2m = p$, & $4mm = pp$. Divisant les deux membres par 4, vient $mm = \frac{1}{4}pp$. Il faut donc prouver que $z = m + \sqrt{mm + q}$. Nous supposons $z = p + x$ ou $z = m + m + x$; donc z est égal à la racine du quarré de $m + x$ qui est $mm + 2mx + xx$.

Ainsi $\sqrt{mm + 2mx + xx} = m + x$. Or puis que $z = p + x$ ou $z = 2m + x$; donc $2mx + xx = xz$. Mais par le Corollaire précédent $xz = q$.

$=q$. Donc $2mx \pm xx = q$. Partant $x = m \pm \sqrt{mm \pm q}$; ou $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp \pm q}$, qui eſt ce qu'il falloit prouver.

III.

Réſolution des Equations du ſecond Degré.

Premier Cas.

Lorſque l'Equation eſt incomplete.

On dit qu'une Equation eſt complete, lors que tous les termes paroiſſent; ſi quelqu'un ou pluſieurs ſont évanouïs, qu'elle eſt incomplete. Une Equation du ſecond degré incomplete ſe réduit à ces deux formules $xx * + q = o$ & $xx * - q = o$. En ôtant de la premiere formule, de part & d'autre q, vient $xx = -q$, cette formule montre que x eſt une grandeur négative. Prenant la racine quarrée de l'un & l'autre membre, on aura $x = \pm \sqrt{-q}$. La raiſon pour laquelle on met $+$ & $-$ devant le ſigne radical, en cette formule, c'eſt que le quarré $-q$ ſe peut faire également de cette racine $+\sqrt{-q}$ multipliée par elle-même, ou de cette racine $-\sqrt{-q}$, multipliée auſſi par elle-même.

Dans l'autre formule $xx * - q = o$, la grandeur inconnuë x eſt poſitive. J'ajoute de part & d'autre q, ce qui donne cette Equation $xx = q$; d'où ayant tiré les racines quarrées, la queſtion ſera réſolue $x = \sqrt{q}$. Si q n'eſt pas un nombre quarré, on ne pourra pas exprimer en nombre la juſte valeur de x.

Se-

Second Cas.

Lorsque l'Equation est complete.

On pourroit résoudre cette Equation comme dans le premier Cas; parce qu'il est toujours aisé de la rendre incomplete, en faisant évanouïr son second terme, comme on l'a enseigné ci-dessus.

Nous avons déja dit que les Equations du second genre qui ont tous leurs termes, se réduisent à ces quatre formules.

$$\begin{array}{llll} z^2 - pz - q = 0 & z^2 = pz + q \\ z^2 - pz + q = 0 & z^2 = pz - q \\ z^2 + pz - q = 0 & z^2 = -pz + q \\ z^2 + pz + q = 0 & z^2 = -pz - q \end{array}$$

Ces quatre formules se peuvent résoudre par le Théorême 2 ci-dessus. Voyons comme on le peut faire sans le secours de ce Théorême. Je transforme les quatre formules en celles-ci.

$$\begin{array}{l} z^2 - pz = +q \\ z^2 - pz = -q \\ z^2 + pz = +q \\ z^2 + pz = -q \end{array}$$

J'ajoute de part & d'autre $\frac{1}{4}pp$, c'est à-dire le quart du quarré de la grandeur connue du second terme; & j'ai ces Equations.

$$\begin{array}{l} z^2 - pz + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{4}pp + q \\ z^2 - pz + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{4}pp - q \\ z^2 + pz + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{4}pp + q \\ z^2 + pz + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{4}pp - q \end{array}$$

Après cela le premier membre eſt une puiſſance parfaite, dont il eſt facile de tirer la racine quarrée. Celle de $z^2 + pz + \frac{1}{4}pp$ eſt $z + \frac{1}{2}p$. Ainſi en faiſant l'extraction des autres formules on les réduit à celles-ci.

$$z - \tfrac{1}{2}p = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}pp + q}$$
$$z - \tfrac{1}{2}p = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q}$$
$$z + \tfrac{1}{2}p = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}pp + q}$$
$$z + \tfrac{1}{2}p = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q}.$$

Remarquez ces deux ſignes $\pm$ qu'on met devant le ſigne radical, pour faire connoitre que z a deux valeurs, ſelon qu'on prend cette grandeur poſitivement ou négativement.

Enfin ayant tranſporté $\frac{1}{2}p$ de l'autre côté afin que l'inconnue ſe trouve ſeule, on a ces dernieres formules qui ſont la réſolution des précédentes.

$$z = +\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}pp + q}$$
$$z = +\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q}$$
$$z = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}pp + q}$$
$$z = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q}.$$

C'eſt ce que nous avons démontré dans le ſecond Theorême ci-deſſus.

PROBLEMES DU SECOND DEGRÉ.

Premier Probleme.

Le premier terme a *d'une Progreſſion Arithmetique étant donné, avec* b *la difference qui regne dans*

dans la Progreſſion, & d ſomme de tous ſes termes, trouver ſon dernier terme, & le nombre de tous les termes.

Soit x le nombre de tous les termes. Selon ce qui a été démontré Liv. III. n. 28. le dernier terme d'une progreſſion contient le premier terme a. plus autant de fois la difference b qu'il y a de termes moins une fois cette difference. Ainſi le dernier terme ſera $xb-b+a$, ce dernier terme avec le premier a, c'eſt-à-dire $xb-b+2a$ multiplié par x nombre des termes, eſt égal au double de d ſomme de la progreſſion. Ainſi $xxb-bx+2ax=2d$. Pour corriger cette Equation, je prens $c=-b+2a$. Ainſi j'ai $xxb+cx=2d$. Je diviſe le tout par b, & vient $xx+\frac{cx}{b}=\frac{2d}{b}$. Comme b eſt connu, ſi c'eſt par exemple 3, je prens p tiers de c, & alors $px=\frac{cx}{b}$; & comme $\frac{2d}{b}$ eſt tout connu, je le fais égal à q, ainſi j'ai cette Equation $xx+px=q$, ou $xx+px-q=0$, qui eſt une Equation du ſecond degré qui vient d'être réſolue.

SECOND PROBLEME.

Deux Marchands ont mis en ſocieté 12 piſtoles, & ils en ont gagné 34. Le premier a eu ſept piſtoles, tant pour miſe que pour ſon gain pour deux mois; & le ſecond en a pris 39, tant pour ſa miſe que pour ſon gain pour cinq mois. On demande la miſe & le gain d'un chacun en particulier.

J'appelle a la miſe de ces deux Marchands,

qui eſt 12 piſtoles. Donc ſi la miſe du premier eſt x, celle du ſecond eſt $a-x$.

Je nomme b la miſe & gain du premier, qui eſt 7 piſtoles; ainſi $b-x$ eſt le gain du premier.

Je nomme c la miſe & gain du ſecond, qui eſt 39 piſtoles; ainſi puis que ſa miſe eſt $a-x$; donc $c-a+x$ ſera ſon gain.

Comme x miſe du premier, multipliée par ſon tems qui eſt 2, ce qui fait $2x$, eſt à ſon gain, qui eſt $b-x$; ainſi $a-x$ miſe du ſecond multipliée par ſon tems qui eſt 5, ce qui fait $5a-5x$, eſt à ſon gain qui eſt, comme nous venons de le dire, $c-a+x$, c'eſt-à-dire que $2x.\ b-x :: 5a-5x.\ c-a+x$. Le *produit* des extrêmes eſt égal à celui des moyens; donc $2xc-2ax+2xx=5ab-5ax-5bx+5xx$. J'ajoute de part & d'autre $2ax$, & je retranche en même tems $2xx$, & j'ai $2xc=5ab-3ax-5bx+3xx$. J'ajoute de part & d'autre $3ax$ & $5bx$, ce qui me donne $2xc+3ax+5bx=5ab+3xx$.

Je prens $d=2c+3a+5b$; ainſi $dx=5ab+3xx$. Je ſuppoſe encore $f=5ab$; & qu'ainſi $dx=f+3xx$. Je retranche f de part & d'autre, ce qui me donne $dx-f=3xx$. Enfin au lieu de d je prens $3p$ que je lui ſuppoſe égal, comme auſſi $3q$ égal à f; ainſi $px-q=xx$. Ce qui eſt une Equation du ſecond degré qui a été réſolue.

IV.

Réſolution des Equations du troiſieme Degré.

Lors que les Equations du troiſieme degré n'ont ni ſecond ni troiſieme terme, c'eſt-à-dire qu'elles ne ſont point affectées, elles n'ont

n'ont aucune difficulté. Par exemple, cette Equation étant pure $z^3 = q$, il eſt évident que $z = \sqrt[3]{q}$; & qu'ainſi pour trouver la valeur de z il n'eſt queſtion que de tirer la racine cube de q. Quand une Equation du troiſieme degré a tous ſes termes, il faut faire évanouïr le ſecond, comme on l'a enſeigné ci-deſſus. Or les Equations de ce degré qui n'ont point de ſeconds termes, ſe réduiſent à ces quatre formules.

$$z^3 + pz + q = 0$$
$$z^3 - pz + q = 0$$
$$z^3 + pz - q = 0$$
$$z^3 - pz - q = 0$$

On réſout ces quatre Cas par cette méthode, que Monſieur Varignon propoſe dans les Memoires de l'Academie des Sciences, le 5. Août 1699. à la page 191. Edition de Holl.

Soit $z^3 + pz + q = 0$, l'Equation à réſoudre qui eſt du troiſieme degré, & qui n'a point de ſecond terme. Prenez $z = x - y$, (il faudroit prendre $z = x + y$, ſi l'Equation avoit $-pz$) & vous aurez le cube de z égal à celui de $x - y$. Ainſi $z^3 = x^3 - 3xxy + 3xyy - y^3$. Or $-3xxy + 3xyy = -3xy \times x - y$. Car écrivant au long le produit de $-3xy$ par $x - y$, il vient $-3xxy + 3xyy$. Mais puis que $x - y = z$, on a $-3xy \times x - y = -3xy \times z = -3xyz$. Maintenant dans l'Equation précédente $z^3 = x^3 - 3xxy + 3xyy - y^3$, à la place de $-3xxy + 3xyy$ mettez la valeur $-3xyz$, & l'Equation ſera réduite à celle-ci $z^3 = x^3 - 3xyz - y^3$, &

en

en transposant tout d'un côté $z^3 + 3xyz + y^3 = 0$.

$- x^3$

Si vous comparez terme à terme cette derniere Equation avec la proposée $z^3 + pz + q = 0$, la comparaison du second terme vous donnera $3xyz = pz$, & divisant par z vous aurez $3xy = p$, & divisant encore par $3x$, vous aurez $y = \frac{p}{3x}$; & par conséquent $y^3 = \frac{p^3}{27x^3}$. Or la comparaison du troisieme terme vous donnera $y^3 - x^3 = q$, ou mettant au lieu de y^3 sa valeur $\frac{p^3}{27x^3}$ il viendra $\frac{p^3}{27x^3} - x^3 = q$, & multipliant par x^3, $\frac{1}{27}p^3 - x^6 = qx^3$, & transposant tout d'un côté, vous aurez $x^6 + qx^3 - \frac{1}{27}p^3 = 0$. Or $x^6 = x^3 \times x^3$ & $qx^3 = q \times x^3$. Ainsi on peut regarder x^6 comme un quarré dont x^3 est la racine, & qx^3, comme un plan dont x^3 sont les racines; ainsi $x^3 + qx^3 - \frac{1}{27}p^3$, comme une Equation du second degré; par conséquent $x^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$, selon ce qu'on a démontré en parlant de la résolution du second degré. Ainsi ce que nous avons dit éclaircit la résolution du troisieme, & nous découvre le fondement des règles; car par la même voie on trouve la valeur de y, savoir que $y^6 + qy^3$ est égal à $\frac{1}{27}p^3$. Partant comme $q = y^3 - x^3$, ou $q + x^3 = y^3$, on pourroit aussi se servir de $y = \frac{p}{3x}$, mais c'est pour arriver d'abord aux formules ordinaires que l'on

l'on commence par ici. L'on aura de même $y^3 = q + x^3 = \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$.

Donc $z - (x - y) = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$, ce qu'il falloit trouver.

On peut voir dans les Memoires de l'Academie Royale des Sciences de l'année 1699, page 190. l'Ecrit entier que Monſieur Varignon y a fait inſerer, pour trouver ce que donneront encore les trois autres Cas de ce troiſieme degré ſans ſecond terme. La forme du volume de mon Ouvrage ne me permet pas de rapporter cet Ecrit.

V.

Réſolution des Equations du quatrieme Degré.

On ſuppoſe qu'on a fait évanouïr le ſecond & le quatrieme terme d'une Equation du quatrieme degré qu'on veut réſoudre. Mais ſi on la propoſoit toute complete, il faut alors la rendre incomplete en faiſant évanouïr ces deux termes. Or une Equation incomplete de quatre degrez ſe réſout comme celle de deux degrez. La quatrieme puiſſance ſe peut conſiderer comme la ſeconde, avec cette difference, que ſa racine eſt un quarré. La racine de x^4 eſt x^2. Voilà quatre formules auxquelles on réduit ces Equations : pour les réſoudre on pratique ce qui a été enſeigné pour le ſecond degré, comme vous le voyez ; mais comme je l'ai dit, la racine eſt un quarré, qui eſt égal à des grandeurs toutes connues. Ainſi l'Equation ſe trouve entierement réſolue.

1. $x^4 = aabb.$ $xx = ab$ ou $x = \sqrt{ab}$

2. $x^4 = aaxx + aabb.$ $xx = \frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + aabb}$

3. $x^4 = -aaxx - aabb.$ $xx = -\frac{1}{2}2a + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 - aabb}$

4. $x^4 = aaxx - aabb.$ $xx = \frac{1}{2}aa \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^4 - aabb}.$

Pour avoir la valeur de xx il faut prendre la racine quarrée de chaque membre; car comme on le dit, les racines que donne la réſolution précédente ſont des quarrez. Or en tirant la racine quarrée des deux membres on a ces trois formules.

2. $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + aabb}}$

3. $x = -\sqrt{\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 - aabb}}$

4. $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^4 - aabb}}.$

Si l'on veut que tout le membre connu, à ſavoir $\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + aabb}$ ſoit nommé ab, tout ſe réduira à cette ſeule formule $xx = ab$ dont la réſolution eſt $x = \sqrt{ab}$. Pour s'aſſûrer que ces réſolutions ſont bonnes, il n'y a qu'à élever à la quatrieme puiſſance ces racines; comme pour s'aſſûrer d'une racine quarrée, on la quarre. Si alors elles ſont égales aux grandeurs dont on prétend qu'elles ſont les racines, elles le ſont véritablement.

La ſeconde Equation étoit $xx = aax + aabb$, dont la derniere ſolution eſt $= \sqrt{\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}aa + aabb}}$; en quarrant chaque membre l'on a, $xx = \frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + aabb}$. En tranſpoſant $\frac{1}{2}aa$, l'on a $xx - \frac{1}{2}aa = \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + aabb}$; & quarrant chaque membre on a $x^4 - aaxx + \frac{1}{4}a^4 = \frac{1}{4}a^4 + aabb$, qui ſe réduit à $x^4 - aaxx = aabb$ ou $x^4 = aaxx + aabb$, qui eſt l'Equation propoſée. Ainſi des autres formules.

SUPLEMENT DES ELEMENS DES MATHEMATIQUES.

LIVRE VIII.

TRAITÉ

De la progreſſion des nombres naturels & des nombres impairs. Les fondemens de l'Arithmetique des Infinis.

CHAPITRE PREMIER.

Proprietez de la Progreſſion des nombres naturels.

1. ON appelle nombres naturels ceux dont la différence eſt l'unité, comme,
: 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. &c.
Ces nombres ſont une progreſſion qui peut être continuée juſqu'à l'infini. Je nomme *a* le pre-

premier terme de cette progreſſion, ſoit qu'on la commence par zero, ſoit par 1. Le dernier terme, de quelques termes qu'on compoſe la progreſſion, ſera nommé x, & z le nombre des termes, quel que ſoit ce nombre.

Lemme Premier.

x le dernier terme plus l'unité, eſt égal au premier terme a plus z le nombre des termes. 3

C'eſt-à-dire que $x+1=a+z$, & par conſéquent que $x=a+z-1$.

Le dernier terme x contient le premier terme a, & autant de fois la difference qui regne dans la progreſſion qu'il y a de termes devant lui. Liv. III. n. 20. Or z eſt le nombre de tous les termes de la progreſſion, partant égal moins 1 au nombre des termes qui précédent le dernier. Ce nombre eſt ainſi $z-1$; donc $x=a+z-1$, ajoutant l'unité de part & d'autre, vient $x+1=a+z$; ce qu'il falloit prouver.

Premier Theoreme.

Si le premier terme eſt zero, x le dernier terme plus l'unité eſt égal à z le nombre des termes. 3

C'eſt-à-dire que $x+1=z$ ou $x=z-1$; car par le Lemme précédent $x=a+z-1$. Or ici a eſt zero qui ne fait rien, on peut donc le ſupprimer; & partant $x=z-1$, ajoutant de part & d'autre l'unité, on aura $x+1=z$. Ce qu'il falloit démontrer.

SECOND THEOREME.

4 *Si le premier terme* a *eſt l'unité, le dernier terme* x *eſt préciſément égal à* z *nombre des termes.*

Selon le Lemme $x = a + z - 1$, ici $a = 1$. donc $x = 1 + z - 1$. Or $+1 - 1 = 0$. donc $x = z$; ce qu'il falloit prouver. Ainſi dans une progreſſion de cinquante termes, ſi le premier eſt 1, le cinquantieme eſt 50.

TROISIEME THEOREME.

5 *Le terme* (que je nomme *y*) *qui ſuivroit après* x *le dernier terme, eſt égal au premier* a *plus* z *nombre des termes.*

Il faut prouver que $y = a + z$. Ce terme y eſt plus grand d'une unité que le dernier x. Ainſi $x + 1 = y$ ou $x = y - 1$. Mais par le Lemme précédent $x = a + z - 1$, donc $y - 1 = a + z - 1$, ou $y = +1 + a + z - 1$, & parce que $+1 - 1$ ce n'eſt rien, $y = a + z$; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE PREMIER.

6 *Donc ſi dans* $y = a + z$, *le premier terme* a *eſt zero, le terme* y *eſt préciſément égal à* z.

COROLLAIRE 2.

7 *Donc ſi dans* $y = a + z$, *le premier terme* a *eſt* 1; *le terme* y *moins* 1 *eſt égal à* z *ou* $z + 1 = y$.

QUA-

QUATRIEME THEOREME.

Le premier terme a *étant zero, le quarré de* x 8
dernier terme plus ce même terme x *eſt égal au double de toute la progreſſion.*

C'eſt-à-dire que $xx+x$ eſt égal au double de la ſomme de toute la progreſſion. La ſomme du premier terme qui eſt ici zero, & de x dernier terme, ne fait que x; & en ce cas $x = z-1$ ou $x+1=z$. *Jup.* n. 3. Or multipliant la ſomme du premier & du dernier terme, c'eſt-à-dire ici x par z nombre des termes, ou par $x+1$ égal à z, le produit $xx+1x$ ſera le double de la progreſſion, ſelon ce qui a été démontré Liv. III. n. 31. Partant xx quarré du dernier terme plus une fois x eſt le double de la progreſſion; ce qu'il falloit démontrer.

CINQUIEME THEOREME.

Le premier terme étant zero, le quarré de y 9
qui ſuivroit le dernier terme x, *moins une fois* y, *eſt égal au double de la progreſſion des termes précédens.*

On vient de prouver que $xx+x$ eſt le double de la ſomme de la progreſſion dont x eſt le dernier terme. Or le terme y qui ſuit ce dernier x étant plus grand de l'unité; & par conſéquent $x = y-1$; il faut que $xx = yy-2y+1$. Ajoutons la premiere Equation $x = y-1$, viendra $xx+x = yy-2y+1+y-1$. Or $-2y+1+y-1=-y$, donc $xx+x = yy-y$. Mais $xx+x$ eſt le double de la progreſſion dont x eſt le dernier terme; donc $yy-y$ eſt le double de la même progreſſion.

LEM-

Lemme Second.

10 *Dans la progreſſion naturelle ſoit ajouté à un nombre quarré le double de ſa racine, plus l'unité, cela fera une ſomme égale au nombre quarré qui ſuit de plus près ce quarré.*

Soit aa un nombre quarré dont a eſt la racine. Celle du nombre quarré qui ſuit de plus près eſt $a+1$. dont le quarré eſt $aa+2a+1$; ce qui montre que pour avoir un quarré qui ſuive de plus près un nombre quarré donné, il faut prendre $2a$ double de la racine plus l'unité. Ainſi pour avoir le quarré qui ſuive celui-ci 9, je lui ajoute 6 double de ſa racine, & l'unité, ce qui fait 16.

$$9+3+3+1=16.$$

Sixieme Theoreme.

11 *Le quarré d'un terme de la progreſſion naturelle eſt égal au double des termes qui le précédent plus le quarré du premier, plus encore la difference qui regne dans la progreſſion multipliée par le nombre des termes qui précédent le terme donné.*

Soit cette progreſſion $\div\ a.\ b.\ c.\ d.$ Par le Lemme précédent.

$$dd=cc+2c+1$$
$$cc=bb+2b+1$$
$$bb=aa+2a+1$$

Je ſubſtitue ou j'écris $bb+2b+1$ en la place de cc; comme $aa+2a+1$ en la place de bb, ce qui me donne

$$dd=\begin{cases} & +2c+1 \\ & +2b+1 \\ aa & +2a+1 \end{cases}$$

Par

Par conſéquent le quarré de dd eſt égal, 1°. à aa quarré du premier terme a. 2°. à $2c+2b+2a$, c'eſt-à-dire au double de tous les termes qui le précédent. 3°. à la difference 1 multipliée par le nombre des termes qui le précédent; c'eſt-à-dire ici à 1 multiplié par 3, ce qui fait 3.

LEMME TROISIEME.

Si on ajoute à un nombre cubique le triple du quarré de ſa racine, plus le triple de la même racine, plus l'unité, cela fera une ſomme égale au nombre cubique, qui ſuit de plus près le cube propoſé. 12

Soit aaa un nombre cube, dont la racine eſt a, par conſéquent $a+1$ ſera celle du nombre cube qui ſuit de plus près le nombre cube aaa.

Le cube de $a+1$ eſt $aaa+3aa+3a+1$. Ce qui fait voir que le cube que l'on cherche eſt plus grand que le nombre cube aaa. 1°. du triple du quarré de ſa racine a. 2°. du triple de la même racine. 3° de l'unité. Ainſi 64, nombre cubique qui ſuit de plus près le nombre cubique 27, eſt plus grand 1°. de 27 qui eſt triple de 9, quarré de ſa racine cubique qui eſt 3. 2°. de 9, triple de 3. 3°. de l'unité; car $27+27+9+1=64$.

SEPTIEME THEOREME.

Le cube d'un terme de la progreſſion naturelle eſt égal 1°. au cube du premier terme. Plus 2°. au triple des quarrez des termes qui le précédent. Plus 3°. au triple de la ſomme des termes qui le précédent. Plus 4°. à l'unité multipliée par le nombre des termes qui précédent ledit terme. 13

Soit cette progression $\div a. b. c. d.$ par le Lemme précédent,

$$d^3 = c^3 + 3cc + 3c + 1$$
$$c^3 = b^3 + 3bb + 3b + 1$$
$$b^3 = a^3 + 3aa + 3a + 1$$

Substituant en la place de c^3 la grandeur égale $b^3 + 3bb + 3b + 1$, & en celle-ci au lieu de b^3 substituant la grandeur égale $a^3 + 3aa + 3a + 1$: on aura

$$d^3 = \left\{ \begin{array}{r} 3cc + 3c + 1 \\ 3bb + 3b + 1 \\ a^3 + 3aa + 3a + 1 \end{array} \right.$$

Partant le cube de d est égal, 1°. au cube a^3 du premier terme a. 2°. à $3cc + 3bb + 3aa$, c'est-à-dire au triple des quarrez des termes précédens. 3°. à $3c + 3b + 3a$: c'est-à-dire au triple de la somme de tous les termes de la progression qui le précédent. 4°. & outre cela au produit de l'unité multipliée par le nombre des termes qui le précédent, c'est-à-dire que pour faire une somme égale au cube d^3, il faut encore ajouter à tout cela le nombre des termes qui précédent sa racine dans la progression; or ce nombre est 3, puis que d est le quatrieme terme, & que 3 fois 1 donne toujours 3.

COROLLAIRE.

14 *Le cube d'un terme de la progression naturelle, moins le cube du premier terme, moins le triple de la somme des termes qui le précédent, est égal au triple des quarrez des termes qui le précédent.*

Soit a le premier terme, s la somme des termes, t le nombre des termes, & q la somme des

des quarrez. Par le Théorême $d^3 = a^3 + 3q + 3\int + t$. Otant de part & d'autre $+ a^3 + 3\int + t$, vient $d^3 - a^3 - 3\int - t = 3q$; ce qu'il falloit prouver.

Ce Corollaire nous en fait appercevoir trois autres d'une seule vue.

1°. $d^3 - a^3 - 3q - 3\int = t$.

2°. $d^3 - a^3 - 3q - t = 3\int$.

3°. $d^3 - 3q - 3\int - t = a^3$.

Ces Corollaires sont si évidens & coulent si naturellement du Théorême proposé, qu'il n'étoit presque pas besoin d'aucune autre démonstration pour les prouver.

Huitieme Theoreme.

On voit bien encore que du sixieme Théorême sup. *n.* 11. *on auroit pu tirer de la même maniere trois Corollaires à peu près semblables.*

CHAPITRE II.

Proprietez de la Progression des nombres impairs.

Les nombres impairs sont faits de l'addition des nombres naturels; par exemple, ce nombre 3 qui est le second des impairs, est fait de l'addition du premier & du second des naturels; 5 qui est le troisieme des impairs, est fait de l'addition du second & du troisieme des naturels, ainsi de suite. 15

Neuvieme Theoreme.

Si l'on dispose successivement & par ordre tous les nombres impairs 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. *& les* 16

autres qui ſuivent, le premier de ces nombres qui eſt 1, *ſera le premier nombre quarré; ce quarré plus* 3 *qui le ſuit, donne* 4 *le ſecond quarré;* 4 *plus* 5 *qui ſuit* 3, *donne* 9 *le troiſieme quarré; & ainſi de ſuite.*

La raiſon de cela eſt claire; car *ſup.* n. 10. ajoutant au quarré 1 deux fois ſa racine plus l'unité, c'eſt-à dire 3, l'on a le quarré qui le ſuit qui eſt celui de 2; ajoutant au quarré 4 deux fois ſa racine & l'unité, c'eſt à-dire 5, on a le quarré de 3 qui eſt 9; ainſi de ſuite.

Dixieme Theoreme.

17 *Dans la progreſſion des nombres impairs, le quarré du nombre des termes eſt égal à la ſomme de la progreſſion.*

Le nombre 2 eſt la difference qui regne dans la progreſſion des impairs. Soit nommé z le nombre des termes. Le dernier terme que je nomme x eſt égal au premier terme plus la difference 2 multipliée par z moins une fois cette difference 2, Liv. III. n. 20. Partant $x = 1 + 2z - 2$. La ſomme du premier terme 1 & du dernier x, ou $1 + 2z - 2$ grandeur égale, eſt donc $1 + 1 + 2z - 2$ ou $2z$, puiſque $+1 + 1 - 2 = 0$. Or cette ſomme $2z$ étant multipliée par z le nombre des termes, ce qui fait $2zz$, eſt le double de la progreſſion: donc la moitié de $2zz$ qui eſt $1zz$ ou zz, eſt égale à la ſomme de toute la progreſſion. Liv. III. n. 30. ce qu'il falloit prouver.

Ainſi dans une progreſſion de nombres impairs qui a dix termes, le quarré du nombre des termes, c'eſt-à-dire le quarré de 10, *eſt égal à la ſomme de tous les dix termes de la progreſſion.*

On

On découvre d'admirables proprietez dans les nombres ; elles ſont infinies. Conſiderez celles-ci, que j'expoſe ſeulement. Jettez les yeux ſur la Table ſuivante de ſix colomnes. 18

La premiere eſt des progreſſions des nombres naturels.

La ſeconde colomne contient les quarrez de ces nombres, qui ſont faits de l'addition des nombres impairs qui précédent chaque quarré. Ainſi le deuxieme quarré 4 *eſt fait des deux premiers impairs* 1 & 3. *Le troiſieme quarré* 9 *eſt fait du premier, du ſecond, & du troiſieme des impairs,* 1. 3. 5. *Le quatrieme quarré* 16 *eſt fait de* 1. 3. 5. 7. *les quatre impairs. Et c'eſt ce qui vient d'être démontré* ſup. *n.* 16.

La troiſieme colomne comprend les differences des quarrez des nombres naturels, & ces differences ſont la progreſſion des nombres impairs.

Dans la quatrieme colomne, ſont les cubes des nombres naturels, qui ſont faits de l'addition des differences des quarrez, en cette ſorte. Le premier cube étant 1. *pour faire le ſecond, il faut ajouter les deux premieres differences* 3 & 5. *ce qui donne* 8 *ſecond cube ; pour avoir le troiſieme, il faut ajouter les* 3 *differences ſuivantes, ſavoir,* 7, 9, & 11, *ce qui donne* 27 *troiſieme cube, & ainſi de ſuite. La raiſon de cela eſt fondée ſur le Lemme* 3me ſup. *n.* 12.

Dans la cinquieme, ſont les differences des cubes.

Et dans la derniere, les differences de ces differences, qui ſont une Progreſſion Arithmetique, dont la difference eſt 6.

Nombres.	Quarrez des Nombres.	Differences des quarrez.	Cubes des nombres.	Differences des cubes.	Differences des differences des cubes.
1	1	3	1	7	12
2	4	5	8	19	18
3	9	7	27	37	24
4	16	9	64	61	30
5	25	11	125	91	36
6	36	13	216	127	42
7	49	15	343	169	48
8	64	17	512	217	54
9	81	19	729	271	60
10	100	21	1000	331	66

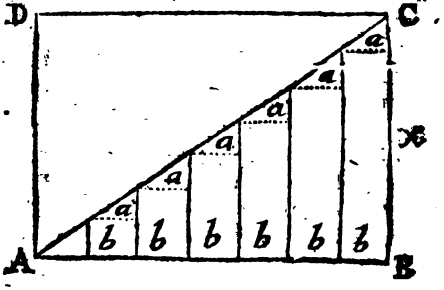
CHAPITRE III.

Fondement de l'Arithmetique des Infinis.

19 DAns la progreſſion naturelle, l'unité eſt la difference entre deux termes qui ſe ſuivent immédiatement. La difference entre 4 & 5 c'eſt 1. Or ſi on interpoſoit entre ces deux nombres 4 & 5, mille autres termes qui fuſſent auſſi en progreſſion Arithmetique, & qu'on fît la même choſe entre chacun des autres termes de la progreſſion, alors la difference qui regneroit dans la progreſſion ſeroit encore 1, mais un millieme; & ſi on interpoſoit de même entre les termes de cette nouvelle progreſſion mille autres termes, alors cela

cela feroit une nouvelle progreſſion dont la difference ſeroit encore 1, mais un millieme de millieme: continuant de même juſqu'à l'infini, enfin on viendra à une difference ſi petite qu'on la pourroit concevoir ſans erreur comme nulle, c'eſt-à-dire égale à zero. Cela feroit toujours une progreſſion naturelle, dont 1 ſeroit la difference, mais infiniment petite.

Quelque grandeur qu'on propoſe, on y peut concevoir une infinité de parties. Soit, par exemple la ligne *AB*, dans laquelle je conçois une infinité de parties telles que *b*, ou une infinité de lignes élevées ſur ces parties *b*. Je ſuppoſe toutes ces lignes en progreſſion Arithmetique,



croiſſant également depuis *A* juſqu'à *B*. La ligne *BC* eſt la plus grande & le dernier terme de la progreſſion que je nomme *x*; je mene une ligne droite du point *A* au point *C*; & par les ſommets de ces lignes *b* de petites lignes qui font les petits triangles *a*. Il eſt évident que ſi on conçoit un grand nombre de lignes

telles que *b* qui couvrent la ſurface du triangle *ABC*, on pourra dire que la ſomme des lignes *b* ſera égale à la ſurface du triangle *ABC*, après en avoir ôté la ſomme des petits triangles *a*. Or ſi le nombre des lignes *b* eſt infini ou innombrable, & qu'ainſi leur difference ſoit nulle, ou égale à zero; en ce cas, comme tous ces petits triangles *a* ne ſont que des zeros, l'on pourra dire que la ſomme des lignes *b* ſera préciſément égale à la ſurface du triangle *ABC*.

La ligne *AB* ſur laquelle ſont élevées les lignes *b*, peut être conſiderée comme le nombre des termes de la progreſſion que font ces lignes, & *BC* ou *x*, comme nous l'avons dit, en eſt le dernier terme, le premier c'eſt zero. *AB* qui repréſente le nombre des termes ſoit nommée *z*, la ſomme du dernier terme *x*, & du premier qui eſt zero, c'eſt-à-dire *x* étant multiplié par *z*, le nombre des termes, le produit de cette multiplication qui eſt *zx*, ſera le double de toute la progreſſion des lignes *b*, ſelon ce qui a été démontré Liv. III. n. 32. & cela ſe voit à l'œil; car $z = AB$ & $x = BC$. Ainſi $zx = AB \times BC$. Or il eſt évident que la figure *ABCD* eſt le double du triangle *ABC*. Ainſi on peut compter la valeur de ce nombre infini de lignes *b*, marquant préciſément la ſomme qu'elles font. C'eſt ce qui fait qu'on appelle cette méthode *l'Arithmetique des Infinis*. Ceux qui la traitent, expriment ainſi ce que nous venons de démontrer, & en font cette Propoſition.

Une ſuite de lignes en progreſſion Arithmetique étant donnée, ſi on multiplie BC, *la plus grande de toutes ces lignes par* AB *ſomme de tous les termes*,

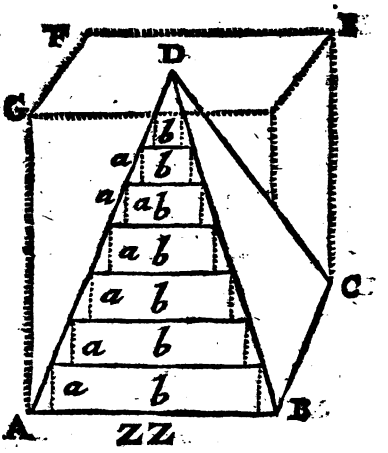
mes, c'eſt-à-dire x *par* z, *le produit* BC×AB *ou* xz *ſera le double de la ſomme de cette progreſſion.*

C'eſt ce que nous avons démontré poſitivement : mais Wallis ne le fait que par induction.

Conſidérons les quarrez des nombres naturels. On voit que ceux des plus grands nombres ont entre eux des differences plus conſiderables. La difference de 4 quarré de ce nombre 2 d'avec 9 quarré de 3, eſt 5 plus petite que celle des quarrez de 3 & de 4, ſavoir de 9 & de 16 qui eſt 7. Ainſi cette difference croît ſelon que croiſſent les nombres impairs, comme nous l'avons remarqué, *ſup.* n. 18. Mais ſi on ſuppoſoit entre chacun des nombres de la progreſſion naturelle un nombre infini de moyens proportionnels, qui fiſſent une nouvelle progreſſion dans laquelle regnât une difference plus petite que toute grandeur qu'on puiſſe penſer, alors on pourroit concevoir qu'il n'y auroit aucune difference ſenſible entre les quarrez de ces nombres qui ſeroient les termes de cette nouvelle progreſſion.

Pour rendre la choſe ſenſible, concevons les nombres quarrez, des nombres de la progreſſion naturelle à commencer par zero. Je ſuppoſe que tous ces quarrez que je nomme *b*, ſont mis les uns ſur les autres. Le dernier ou le deſſus eſt *D* zero ; le plus grand qui eſt deſſous eſt *ABCA*. Ils décroiſſent en montant ; mais je ſuppoſe qu'ils ont la même épaiſſeur, ou qu'ils ſont en égale diſtance les uns des autres, ils font une pyramide ; & s'ils ont de l'épaiſſeur, ils font un ſolide égal à la ſolidité

de la pyramide *ABCD*, ſi on en ôte les petits triangles *a* qui laiſſent les échelles que font tous ces quarrez étant mis les uns ſur les autres, & décroiſſant comme ils font.



Mais ſi au lieu d'un certain nombre fini de quarrez entre *AB* & *D*, il y en avoit une infinité, leur difference *a* ne ſeroit nullement ſenſible; c'eſt-à-dire, qu'ils ne laiſſeroient point de triangles ou d'échellons ſenſibles ſur la pyramide qu'ils feroient; par conſéquent leur ſolidité ſeroit ſenſiblement la même que celle de la pyramide *ABCD*. La queſtion eſt de trouver quelle eſt la raiſon de la ſomme de tous ces quarrez *b* avec le produit du quarré *ABCA*, qu'on peut regarder comme le plus grand terme de la progreſſion, multiplié par la hauteur de tous ces quarrez, ou par le nombre des

des termes de cette progreſſion; ce qui feroit le ſolide *ABCEFG*. Le premier terme de la progreſſion eſt zero ; je ſuppoſe un nombre infini de termes, dont le plus grand eſt x, & par conſéquent xx eſt le plus grand quarré de tous les quarrez des termes de la progreſſion, x étant le dernier terme, $x+1$ *ſup.* n. 3. eſt le nombre des termes, ainſi $x+1=AG$, partant xx multiplié par $x+1$ eſt égal au ſolide *ABCEFG*, ainſi $x^3+xx=ABCEFG$. Or $x^3+xx+\frac{xx+x}{2}$ eſt le triple de la ſomme des quarrez de la progreſſion naturelle ; donc *ABCEFG* plus $\frac{xx+x}{2}$ eſt le triple de tous ces quarrez. Il n'eſt donc queſtion que de montrer que cette difference $\frac{xx+x}{2}$ eſt de nulle conſideration.

Les differences de tous ces quarrez ſont une progreſſion de nombres impairs, *ſup.* n. 18, qui a un nombre de termes égal à celui de la progreſſion des nombres naturels dont on conſidere les quarrez. Ainſi $x+1$ eſt encore le nombre des termes de cette progreſſion d'impairs, partant le dernier terme de ces impairs eſt encore x ; or le premier terme étant zero, donc $x+0$, ou x multiplié par $x+1$ le nombre des termes, fait $xx+x$, double de toute la progreſſion des impairs : ainſi $\frac{xx+x}{2}$ eſt la juſte ſomme de la progreſſion que ſont ces differences. Par l'hypotheſe, la difference de tous

ces quarrez eſt nulle, ou n'eſt pas ſenſible; donc $\frac{xx+x}{2}$ ne doit point être conſiderée; ainſi on peut dire que la ſomme de tous ces quarrez eſt le tiers du ſolide *ABCEFG* : qui eſt ce qu'il falloit démontrer.

En ſuivant la méthode que nous avons employée, on pourroit démontrer des autres Puiſſances ce que nous avons démontré de la premiere & de la ſeconde Puiſſance : ſavoir, par exemple, que la ſomme des termes d'une progreſſion naturelle infinie, eſt le quart du produit du cube du dernier terme multiplié par le nombre des termes. Ainſi de toutes les autres Puiſſances.

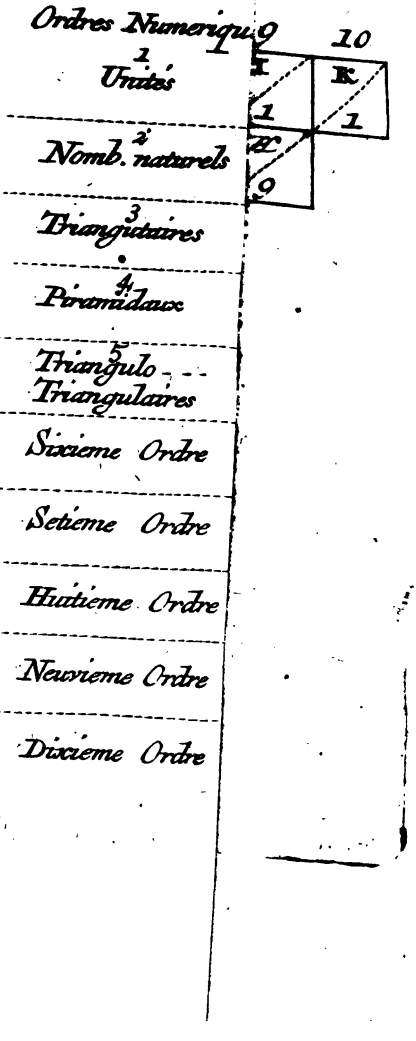
TRAITÉ

Des Progreſſions Arithmetiques & Géometriques jointes enſemble.

De la compoſition & de l'uſage des Logarithmes.

AVERTISSEMENT.

LEs deux Progreſſions Arithmetique & Géometrique ont des proprietez conſiderables, quand elles ſont jointes enſemble. Elles ſont dans le Triangle Arithmetique dont M. Paſchal a fait un Traité. J'expoſerai ſommairement les proprietez de


Ordres Numeriques
1
Unités
2
Nomb. naturels
3
Triangulaires
4
Piramidaux
5
Triangulo-Triangulaires
Sixieme Ordre
Setieme Ordre
Huitieme Ordre
Neuvieme Ordre
Dixieme Ordre
9
10
I
X
1
1
XC
0

le ce Triangle, que je ſuppoſe fait tel que cet Auteur le repréſente. J'en conſidere les proprietez principales qui réſultent de la diſpoſition des nombres qu'il renferme, toutes ſi évidentes, qu'il n'eſt point néceſſaire de les démontrer autrement qu'en les expoſant.

CHAPITRE PREMIER.

Proprietez du Triangle Arithmetique, qui comprend celles des Progreſſions Arithmetiques & Géometriques.

IL faut d'abord remarquer dans ce Triangle une progreſſion, qui conſiſte en ce que chaque baſe contient une cellule plus que la précédente. Il n'y en a qu'une dans l'angle droit, ſavoir la cellule *A*; après laquelle ſuivent les deux cellules *B* & *L*; après elles il y en a trois autres dans la baſe qui ſuit, qui ſont *CAM*.

La Cellule *A* eſt appellée la Génératrice, & le nombre 1 qui y eſt, le Générateur. Il eſt arbitraire, on y peut mettre tout autre nombre, mais celui-là poſé, il faut qu'en chaque cellule il y ait un nombre égal aux deux des deux cellules, l'une ſupérieure dans le rang parallele, l'autre qui la précéde dans le rang perpendiculaire. Ici l'unité étant la Génératrice, ce nombre 6 de la cellule *a* eſt égal à 3 + 3 des cellules *BK*. De même 3 de la cellule *B* eſt égal à 1 + 2 des cellules *CA*, & 3 de la cellule *K* eſt égal à 2 + 1 des cellules *AM*.

Cela étant, voici les autres proprietez qu'il faut considerer dans ce triangle, & qui en sont comme des conséquences nécessaires.

1°. Chaque cellule est égale à la somme de toutes celles du rang parallele précedent, compriſes depuis ſon rang perpendiculaire juſques au premier inclusivement.

10 = 1 + 2 + 3 + 4, ou $b = L.A.B.C.$

2°. Chaque cellule égale la ſomme de toutes celles du rang perpendiculaire précedent, compriſes depuis ſon rang parallele juſqu'au premier inclusivement.

10 = 1 + 3 + 6, ou $b = C.B.a.$

3°. Chaque cellule diminuée de l'unité eſt égale à la ſomme de toutes celles qui ſont compriſes entre ſon rang parallele & ſon rang perpendiculaire, excluſivement.

15 − 1 = 4 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
ou $c - 1 = C + B + A + L + D + C + B + A$

4°. Chaque cellule eſt égale à ſa réciproque, $B = L$ & $B = K$.

5°. Un rang parallele & un perpendiculaire qui ont un même expoſant; ſont compoſez de cellules toutes pareilles. Par exemple:

Le rang parallele dont 6 eſt l'expoſant contient les cellules 1. 6. 21. 56. 126. leſquelles ſont égales à celles du rang perpendiculaire qui a le même expoſant.

6°. La ſomme des cellules de chaque baſe eſt double de celles de la baſe précédente.

$N + K + B + D$ eſt le double de $M + A + C$.

7°. La ſomme des cellules de chaque baſe eſt un nombre de la progreſſion Géometrique double, qui commence par l'unité dont l'expoſant eſt le même que celui de la baſe.

∴ 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c.

8°. Cha-

8°. Chaque baſe diminuée de l'unité eſt égale à la ſomme de toutes les précédentes $N+K+B+D-A=M+A+C+B+L+A$.

La quatrieme baſe eſt de 8, & les trois premieres de 7.

9°. La ſomme de tant de cellules continues qu'on voudra d'une baſe, à commencer par une extrémité, eſt égale à autant de cellules de la baſe précédente, plus encore à autant hormis une.

Prenant ces trois cellules *N. K. B.* de la quatrieme baſe, leur ſomme qui eſt 7 eſt égale aux trois cellules *M. A. C.* de la baſe précédente; plus encore les mêmes cellules hormis *C.* M. Paſchal appelle cellules de la Dividende, celles que la ligne qui diviſe l'angle droit par la moitié traverſe diagonalement, comme *A, A, a, m, ſ.*

10°. Chaque cellule de la Dividende eſt double de celle qui la précéde dans ſon rang parallele ou perpendiculaire. *a* eſt double de *B* comme auſſi de *K.*

11°. Deux cellules contiguës, comme *a* & *l*, étant dans une même baſe, la ſuperieure eſt à l'inferieure 6 à 4, comme la multitude des cellules depuis la ſuperieure juſqu'au haut de la baſe, à la multitude de celles depuis l'inferieure juſqu'en-bas inclusivement; car il y en a trois au deſſus de *a* en comptant *a*; ſavoir *a*, *C*, *E*, & au deſſous il n'y en a que deux, *l* & *O*.

12°. Deux cellules contiguës *b* & *m* étant dans un même rang perpendiculaire, l'inferieure eſt à la ſuperieure 20 à 10, comme 6 expoſant de la baſe ſuperieure à 3 expoſant de ſon rang parallele.

13°. Deux cellules contiguës *B* & *C* étant dans

dans un même rang parallele, la plus grande eſt à la précédente comme 4 expoſant de la baſe de cette précédente à 3 expoſant de ſon rang perpendiculaire.

14°. En tout Triangle Arithmetique, comme dans le Triangle *ADN*, la ſomme des cellules d'un rang parallele, comme ici le ſecond *L A B*, eſt à la derniere de ce rang, c'eſt-à-dire à *B*, comme l'expoſant du Triangle eſt à l'expoſant du rang parallele qui eſt ici 2.

15°. Soit un Triangle quelconque, par exemple le cinquieme *AEO*, quelque rang parallele qu'on y prenne, par exemple le troiſieme, la ſomme de ſes cellules *M. K. a.* qui eſt 10, eſt à *N. l*, celles du quatrieme, comme 4 expoſant du rang quatrieme eſt à 2, expoſant de la multitude de ſes cellules; car il n'y en a que deux de ce rang qui ſoient dans le Triangle *AEO*.

Ce que je viens de dire ſuffit pour comprendre qu'on peut unir enſemble les deux Progreſſions Arithmetique & Géometrique. L'Auteur de ce Triangle Arithmetique montre qu'il a pluſieurs autres proprietez dont on peut faire uſage; c'eſt ce que je ne dois pas entreprendre d'expliquer dans ces premiers Elémens: je dirai ſeulement, qu'il ſert à trouver les ordres numeriques dont on a parlé ci-deſſus L. 2. n. 19. Vous voyez, par exemple, vis-à-vis du troiſieme ordre dans la cellule *a* ce nombre 6, formé par l'addition des nombres du ſecond ordre qui ſont dans les cellules *L, A, B.* ſavoir, 1, 2, 3. & ainſi du reſte.

CHA-

CHAPITRE II.

L'union de la Progreſſion naturelle des nombres, avec une Progreſſion Géometrique, ſe nomme Logarithme.

LE zero, ainſi qu'on l'a remarqué, peut être conſideré comme un milieu entre la grandeur poſitive & la grandeur négative: ce qui eſt poſitivement grand peut-être ſi petit, & ſi infiniment petit, qu'on le peut ſuppoſer égal à zero. Conſiderant donc une grandeur qui commence, & qui croît toujours dans une même proportion Arithmetique, & par conſéquent dont les accroiſſemens ſont une progreſſion Arithmetique, on peut dire que zero en eſt le premier terme; les autres termes ſont les nombres, comme ils ſe ſuivent naturellement. Voici cette progreſſion.

÷ 0. 1. 2. 3. 4 5. 6. 7. 8. 9. 10. &c.

Au lieu de conſiderer que cette grandeur qui commence depuis le zero croiſſe par addition, comme il le fait dans la progreſſion Arithmetique; concevons qu'elle croît par la multiplication; c'eſt-à-dire, qu'étant multipliée continuellement par elle-même, on l'éleve à tous ſes degrez ou puiſſances. Ces puiſſances ſont une progreſſion Géometrique, comme on l'a prouvé, Liv. 4. n. 31. Or on peut dire que le premier terme de cette progreſſion eſt encore zero. Car ſi la grandeur propoſée eſt a, en la conſiderant dans la premiere origine, ſortant pour ainſi dire du néant, & lui étant encore égale, on la peut appeller a^0, qui ſera le pre-

premier terme. Le zero multipliant *a* ne l'augmente point; ainſi a^0, ſera toujours zero; on ne peut donc pas dire que ce ſoit un degré. Le premier degré c'eſt a^1, qui ſera le ſecond terme de la progreſſion. a^2 eſt le troiſieme. Voilà cette progreſſion que font les degrez de *a*.

$\div\div$ a^0. a^1. a^2. a^3. a^4. a^5. a^6. a^7. a^8. a^9.

Tous les degrez d'une grandeur ainſi exprimez ſont deux progreſſions, l'une Arithmetique, l'autre Géometrique. La ſuite des nombres naturels qui expoſent les degrez de cette grandeur ſont une progreſſion Arithmetique; & les puiſſances marquées par les degrez en ſont une Géometrique; ce qui eſt évident.

$\div$ 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. &c.

$\div\div$ a^0. a^1. a^2. a^3. a^4. a^5. a^6. a^7. a^8. a^9 a^{10}. &c.

C'eſt l'union de ces deux progreſſions qu'on nomme *Logarithme*. Ce nom eſt compoſé de deux noms: le premier ſignifie *raiſon*, & l'autre *nombre*. Ce mot *Logarithme* ſignifie proprement des nombres en progreſſion Arithmetique, qui correſpondent à d'autres nombres qui ſont en progreſſion Géometrique. Par le moyen de cette union, on abrege pluſieurs opérations Arithmetiques. Vous voyez ici que la ſomme ou l'addition de deux nombres de la progreſſion Arithmetique eſt l'expoſant d'une puiſſance faite par la multiplication des deux puiſſances dont ces deux nombres ſont les expoſans. Ainſi par exemple $2+3$ ou 5 eſt l'expoſant de a^5, qui eſt une puiſſance faite par la multiplication de a^2 par a^3, ou de *aa* par *aaa*, car ce produit eſt *aaaaa* ou a^5, ſuivant les règles de la multiplication.

Dans les progreſſions Arithmetiques on fait par

par l'addition & la soustraction, ce qui ne se fait dans la progression Géometrique que par la multiplication & par la division, qui sont des opérations beaucoup plus longues. Ainsi en ajoutant ici les exposans 3 & 6, ce qui fait 9, on a l'exposant de la neuvieme puissance, qui est faite par les puissances troisieme & sixieme multipliées l'une par l'autre. Par conséquent la difference de deux exposans est le quotient de deux puissances divisées l'une par l'autre. Ainsi 9 — 6 ou 3 difference de 9 & de 6, est le quotient ou la puissance qui résulte de la puissance neuvieme divisée par la sixieme. La puissance qui résulte de cette division est la troisieme. La division défait ce que la multiplication avoit produit. Or pour diviser a^9 par a^6, il faut ôter six a de neuf a, & les trois a qui restent sont le quotient de cette division.

CHAPITRE III.

De la composition des Tables des Logarithmes.

L'Union des deux progressions Arithmetique & Géometrique donnant donc le moyen de trouver par l'addition & par la soustraction, ce qu'autrement on ne trouve que par la multiplication & par la division, qui sont des opérations difficiles, on s'est avisé de joindre ces deux progressions, & de composer des Tables qui continssent les nombres naturels depuis l'unité jusqu'à cent mille & plus, avec leurs Logarithmes propres; c'est-à-dire des nombres qui fissent une progression Arithmetique,

tique, & fuſſent les expoſans d'autant de termes d'une progreſſion Géometrique. Pour comprendre mieux ce que c'eſt que ces Logarithmes & leurs uſages, il faut faire voir de quelle maniere ils ſe trouvent, c'eſt-à-dire, comme on a compoſé les Tables qui les contiennent. Conſiderez ces deux progreſſions, ou parties de progreſſions, que vous voyez. L'une eſt des nombres naturels, & a pour ſon premier terme zero. Dans la progreſſion Géometrique regne la raiſon décuple, comme la difference qui regne dans l'Arithmetique c'eſt 10000000. On verra pourquoi ce grand nombre de zero dans la progreſſion Arithmetique, & pourquoi je ne lui donne pour ſon premier terme que des zero, leſquels répondent à 1, qui eſt le premier terme de la Géometrique. On a pris ce mot *Logarithme* pour le terme d'une progreſſion Arithmetique qui répond à un terme d'une progreſſion Géometrique : ce nombre 10000000 de la progreſſion Arithmetique eſt donc le Logarithme de 10 un des termes de la Géometrique.

Géometrique.	*Arithmetique.*
1	0.0000000
10	10000000
100	20000000
1000	30000000
10000	40000000
100000	50000000
1000000	60000000

Vous ne voyez pas ici les Logarithmes de 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. & c'eſt ce qui eſt néceſſaire, ſi on veut avoir la ſuite des Logarithmes de tous

tous les nombres comme ils ſe ſuivent depuis l'unité. Ils ne ſe trouvent qu'avec un travail infini, dont vous allez voir un échantillon. Le Baron Neper, Ecoſſois, commença ce travail l'an 1614. Brigge Anglois le perfectionna. Pour juger combien il eſt grand, il ſuffit de chercher le Logarithme de 9, & on connoitra par-là la grandeur du travail; car pour le trouver il faut auparavant trouver tant de moyens proportionnels entre 1 & 10, qu'enfin on en trouve un égal à 9, ou dont la difference avec ce nombre ne ſoit pas conſiderable. Il faut en même tems chercher à chacun de ces moyens proportionnels, un terme dans la progreſſion Arithmetique auſſi moyen proportionnel qui lui réponde, pour avoir enfin le Logarithme de 9, qu'on ne peut aſſigner autrement.

C'eſt par l'extraction des racines qu'on trouve des moyens proportionnels entre deux nombres donnez, comme on l'a enſeigné. Ces produits ne ſont pas toujours des puiſſances parfaites ou nombres quarrez ou cubes; ainſi, comme on n'en peut avoir que des racines approchées, au lieu de 1 & de 10 on prend ces grands nombres 10000000 & 10. 0000000 qui ſont en même raiſon, afin que l'erreur ne ſoit pas ſenſible. Prenez garde à cette Table que vous voyez devant vos yeux. Ce n'eſt que le commencement d'une qui eſt plus grande, qui ſe trouve dans tous les Auteurs qui traitent des Logarithmes. Elle repréſente les ſupputations qu'il faut faire pour trouver le ſeul Logarithme de 9. Jugez de-là du travail de la compoſition des Tables entieres des Logarithmes.

Pro-

Proportion Géometrique.		*Logarithmes.*
A	1.0000000	0. 00000000
C	3.1622777	0. 50000000
B	10.0000000	1 00000000
B	10.0000000	1 00000000
D	5.6234132	0 75000000
C	3.1622777	0 50000000
B	100000000	1 00000000
E	7.4989421	0 87500000
D	5.6234132	0 75000000

Il faut chercher un moyen proportionnel entre ces deux nombres *A* & *B*. On trouve *C* en multipliant *A* par *B*, & tirant la racine quarrée de leur produit; après cela on cherche le Logarithme de *C*, c'eſt-à-dire un nombre qui ſoit moyen Arithmetique entre 000000000 & 100000000. On le trouve ajoutant ces deux termes en une ſomme, dont la moitié eſt le moyen Arithmetique qu'on cherche. Puis que dans cette progreſſion le premier terme n'eſt rien, il ſuffit de prendre la moitié de l'autre terme.

Or le moyen proportionnel *C* qu'on a trouvé eſt moindre que 90000000, il faut donc chercher un autre moyen proportionnel entre le moindre *C* & le plus grand *B*. Je trouve *D* & ſon Logarithme; mais comme ce moyen *D* eſt encore moindre que celui qu'on cherche, il faut de même chercher entre *D* & le plus grand terme *B*, un troiſieme moyen proportionnel: on trouve *E* & ſon Logarithme, qui

qui ne ſera point encore celui que l'on cherche. Mais enfin en continuant de chercher entre le prochainement moindre, & le prochainement plus grand des moyens Géometriques proportionnels, on aura des nombres qui approcheront toujours de plus en plus du nombre propoſé 90000000, lequel enfin ſe trouvera le vingt-ſixieme moyen proportionnel; comme on le voit dans les Auteurs qui rapportent cette opération en toute ſon étendue. Quel eſt donc le travail, quand il faut compoſer des Tables entieres, c'eſt-à-dire, trouver des Logarithmes depuis l'unité juſqu'à cent-mille, & encore plus loin, puiſque ſeulement pour trouver le Logarithme de 9 il faut faire tant d'opérations?

Quand on a trouvé les Logarithmes de tous les nombres abſolus, à commencer depuis l'unité, on les range ſelon leur ſuite. Vous trouverez ici le commencement de ces Tables. Dans la premiere colomne qui eſt la plus étroite, ſont les nombres abſolus, & vis-à-vis leurs Logarithmes, qui ont été trouvez en la maniere que je l'ai dit. Tous les moyens Géometriques qu'il a fallu trouver auparavant, ne paroiſſent point dans ces Tables; car cela ne ſert de rien pour l'uſage qu'on en veut faire.

Les Logarithmes qui ſont comme les expoſans des nombres abſolus ou naturels, ſont entre eux arithmetiquement, ce que les nombres naturels ſont entre eux géometriquement, c'eſt à dire par exemple, que ces trois nombres 4. 6. 9, étant en progreſſion Géometrique, les Logarithmes qui ſont à côté de ces trois nombres ſont en progreſſion Arithmetique.

Ainſi

Ainſi le Logarithme qui ſe trouvera à côté d'un nombre quatrieme proportionnel aux trois précédens, ſera auſſi un quatrieme proportionnel arithmetique aux Logarithmes des trois nombres précédens.

CHAPITRE IV.

De l'uſage des Tables des Logarithmes.

POur trouver un quatrieme terme proportionnel géometriquement, il faut multiplier, comme on l'a enſeigné, le ſecond par le troiſieme, & en diviſer le produit par le premier. Si 3. 6 :: 4. on multiplie 6 par 4, & on diviſe 24 le produit par 3, le quotient 8 ſera le quatrieme qu'on cherche. Or ces multiplications & diviſions ſont des opérations longues : on s'en exempte en ſe ſervant de la Table des Logarithmes. Je prens le Logarithme de 6 qui eſt 7781512, je l'ajoute à celui de 4 qui eſt 6020600, cela fait 13802112 dont je retire ce nombre 4771212 qui eſt Logarithme de 3, le reſte eſt 9030900, qui eſt un quatrieme proportionnel arithmetiquement aux trois Logarithmes précédens. Je cherche ce nombre ou celui qui en approche le plus, à côté duquel je trouve 8, qui eſt ainſi le terme que je cherchois.

Outre que l'addition & la ſouſtraction ſont des opérations plus courtes que la multiplication & la diviſion ; cela ſeul, que le premier terme de la progreſſion des Logarithmes eſt zero, fait que les opérations ſont très-cour-

courtes, ou qu'une ſeule ſuffit. Voyons-le dans un exemple. Soient ces quatre termes a, b, c, d, en proportion Arithmetique, qui repréſente les Logarithmes de quatre nombres. $a+d=b+c$, Liv. III. n. 17. Donc ſi a étoit le Logarithme de l'unité, cette lettre ne vaudroit que zero premier terme de la progreſſion Logarithmique, comme on le voit dans la Table; ainſi d ſeul eſt égal à $b+c$, c'eſt-à-dire que le Logarithme d eſt égal à la ſomme des Logarithmes b & c. Ainſi pour le trouver, il ſuffit d'ajouter les Logarithmes b & c, puis que leur ſomme lui eſt égale. De même ſi $\div a.b.c.$ puis que $a+c=b+b$, ou $a+c=2b$, ſuppoſant comme on a fait que a eſt zero, le Logarithme c eſt le double de b; ainſi pour l'avoir il ne faut que doubler b.

Les Tables des Logarithmes abregent les opérations de l'Arithmetique, donnant le moyen de faire par l'addition ou par la ſouſtraction, ce qu'on ſeroit obligé de faire par la multiplication & par la diviſion: car par exemple, ſi on veut trouver le quotient d'un nombre diviſé par un autre nombre de 24 diviſé par 6, il n'y a qu'à prendre la difference des Logarithmes de 6 & de 24, ou retirer le plus petit du plus grand, le reſte eſt le Logarithme du nombre qui eſt le quotient qu'on cherche; ce quotient eſt 4. Or l'unité eſt au quotient comme le diviſeur 6 eſt au nombre à diviſer 24, ainſi 1.4::6.24. Soient donc leurs Logarithmes $a.b::c.d$, puis que a Logarithme de 1 eſt zero; donc $b+c=d$; donc $d-c=b$, c'eſt-à-dire la difference des Logarithmes de c & de d, ou le reſte du Logarithme de d dont on a ôté c, eſt le Logarithme de b qu'on cherche.

Nous avons vu que la racine d'un nombre quarré est une moyenne proportionnelle entre ce nombre quarré & l'unité. Par exemple, 9 est un nombre quarré dont la racine est 3, il faut que ∴ 1. 3. 9; d'où il suit que le double du Logarithme d'une racine est le nombre quarré: & par conséquent que la moitié du Logarithme d'un nombre quarré est le Logarithme de la racine de ce quarré. Car soient ∴ *a.b.c.* & qu'à l'ordinaire *a* soit zero, pour-lors $b + b = c$, donc la moitié de *c* sera égale à la moitié de $b + b$ ou à *b*. Quand il s'agit donc d'extraire la racine quarrée d'un nombre, ce qui est une opération longue; il faut chercher dans la Table le Logarithme de ce nombre, dont la moitié sera le Logarithme de la racine que l'on cherche.

Le triple du Logarithme d'une racine cube est le Logarithme du cube de cette racine cube; ainsi pour extraire la racine cube d'un nombre, au lieu de faire l'opération ordinaire encore plus longue que l'extraction des racines quarrées, il faut seulement prendre le tiers de son Logarithme; & ce tiers est le Logarithme de la racine cube que l'on cherche. En voilà la démonstration. L'unité est à la racine cube, comme le quarré de cette racine est à son cube. Soit donc ce nombre cube 27 dont la racine est 3, alors 1. 3 :: 9. 27. ainsi ces quatre lettres qui désignent les Logarithmes de ces quatre nombres, font cette proportion Arithmetique, $a.b :: c.d$, donc $a + d = b + c$. On suppose toujours que *a* est zero; partant $d = b + c$. Or on a vu que le Logarithme d'un nombre quarré vaut le double du Logarithme de sa

raci-

racine; donc $c = b + b$. Ainſi ſubſtituant $b + b$ en la place de c, alors $d = b + b + b$, ou $d = 3b$; qui eſt ce qu'il falloit prouver, que d Logarithme du nombre cube étoit le triple de b Logarithme du nombre qui eſt la racine du nombre cube.

Je n'en dirai pas davantage de l'uſage des Tables des Logarithmes, qui ſe trouve expliqué au commencement de ces Tables, dont voilà la premiere page, que je ne propoſe que pour y appliquer ce que nous venons de dire, & le rendre plus intelligible. Ces Tables ſe trouvent par-tout.

N.	Logarithmes.	N.	Logarithmes.
1	0. 0000000	31	1. 4913617
2	0. 3010300	32	1. 5051500
3	0. 4771213	33	1. 5185139
4	0. 6020600	34	1. 5314789
5	0. 6989700	35	1. 5440680
6	0. 7781513	36	1. 5563025
7	0. 8450980	37	1. 5682017
8	0. 9030900	38	1. 5797836
9	0. 9542425	39	1. 5910646
10	1. 0000000	40	1. 6020600
11	1. 0413927	41	1. 6127839
12	1. 0791812	42	1. 6232493
13	1. 1139434	43	1. 6334685
14	1. 1461280	44	1. 6434527
15	1. 1760913	45	1. 6532125
16	1. 2041200	46	1. 6627578
17	1. 2304489	47	1. 6720979
18	1. 2552725	48	1. 6812412
19	1. 2787536	49	1. 6901961
20	1. 3010300	50	1. 6989700
21	1. 3222193	51	1. 7075702
22	1. 3424227	52	1. 7160033
23	1. 3617278	53	1. 7242759
24	1. 3802112	54	1. 7323938
25	1. 3979400	55	1. 7403627
26	1. 4149733	56	1. 7481880
27	1. 4313638	57	1. 7558749
28	1. 4471580	58	1. 7634280
29	1. 4623980	59	1. 7708520
30	1. 4771213	60	1. 7781513

N.	Logarithmes.	N.	Logarithmes.
61	1. 7853298	91	1. 9590414
62	1. 7923917	92	1. 9637878
63	1. 7993405	93	1. 9684829
64	1. 8061800	94	1. 9731279
65	1. 8129134	95	1. 9777236
66	1. 8195439	96	1. 9822712
67	1. 8260748	97	1. 9867717
68	1. 8325089	98	1. 9912261
69	1. 8388491	99	1. 9956352
70	1. 8450980	100	2. 0000000
71	1. 8512583	101	2. 0043214
72	1. 8573325	102	2. 0086002
73	1. 8633229	103	2. 0128372
74	1. 8692317	104	2. 0170333
75	1. 8750613	105	2. 0211893
76	1. 8808136	106	2. 0253059
77	1. 8864907	107	2. 0293838
78	1. 8920946	108	2. 0334238
79	1. 8976271	109	2, 0374265
80	1. 9030900	110	2. 0413927
81	1. 9084850	111	2. 0453230
82	1. 9138139	112	2. 0492180
83	1. 9190781	113	2. 0530784
84	1. 9242793	114	2. 0569049
85	1. 9294189	115	2. 0606978
86	1. 9344984	116	2. 0644080
87	1. 9395193	117	2. 0681859
88	1. 9444827	118	2. 0718820
89	1. 9493900	129	2. 0755470
90	1. 9542425	120	2. 0791812

TRAITÉ

De la Proportion Harmonique.

CHAPITRE PREMIER.

Ce que c'eſt que Proportion Harmonique.

LA proportion Arithmetique & la Géometrique ſont jointes enſemble dans *la proportion* Harmonique. Pour le concevoir, voyons ce qui peut faire que les ſons ſoient d'accord & agréables, ce qui n'arrive que lors qu'il s'y trouve union de ces deux proportions. Le ſon ſe fait par un trémouſſement ou certain mouvement de l'air, qui ſe communique à une membrane tendue dans l'organe de l'ouïe. C'eſt cette impreſſion qui nous cauſe le ſentiment du ſon. Tout corps qui peut donner à l'air ce trémouſſement, eſt ſonore. Par exemple, une corde de boyau ou de leton qui eſt tendue, fait un ſon lors qu'on la pince, parce qu'elle agite l'air. En la pinçant on la tire hors de la ligne droite; où avant que de ſe remettre, & d'être en repos, elle va & vient en delà & en deçà. Ces allées & ces venues ſont ce que l'on appelle des vibrations qui cauſent un trémouſſement dans l'air, & qui par conſéquent ſont ſon.

Pour entendre ce que c'eſt que ces vibrations, conſiderez un pendule, c'eſt-à-dire un

fil

fil au bout duquel pend une bale de plomb. Lors qu'on retire ce pendule hors de la perpendiculaire, la bale y redeſcend, & paſſe au-delà, & ne s'y arrête qu'après pluſieurs allées & venues, ce qu'on nomme des vibrations. Elles ſont à peu près *iſochrones*, c'eſt-à-dire qu'elles ſe font en tems égaux ; car au commencement quand la bale va plus vîte, elle parcourt un plus grand eſpace ; ſur la fin qu'elle va plus lentement, elle a moins de chemin à faire.

Les cordes des inſtrumens font de même des vibrations quand on les pince. Elles ſemblent trembler, & c'eſt en tremblant qu'elles font trémouſſer l'air, ce qui produit le ſon. L'expérience fait connoître que le ſon eſt plus grave lors que les vibrations ſont plus lentes : qu'il eſt plus aigu quand elles ſont plus fréquentes, ou que dans un même tems il s'en fait un plus grand nombre. Les cordes plus longues & plus groſſes & moins tendues, ſe remuant plus lentement, leurs vibrations ſont plus tardives ; auſſi leur ſon eſt plus grave. Une corde plus menue, moins longue, plus tendue, fait plus de vibrations dans un même eſpace de tems ; ainſi ſon ſon eſt plus aigu.

Or trois choſes font l'agrément des ſons ; la diſtinction, l'égalité, la varieté. 1°. Une corde bien égale dont les parties ſont bien unies comme ſont celles de boyau, & plus encore celles de leton, quand elle eſt tendue, eſt plus capable de ces vibrations qui font trembler l'air ; & comme ſon tremblement dure du tems, le ſon qu'elle fait ſe diſtingue bien mieux, & ſe conſerve dans une égalité, ſes vibrations étant à peu près égales pour le tems. Les

oreilles ne peuvent être contentes que de ce qu'elles distinguent; ainsi aucun rapport qui puisse être entre les sons ne leur plait, que quand il s'exprime par de petits nombres. C'est pour cela que les rapports Arithmetiques sont plus propres pour l'Harmonie, parce qu'ils ne consistent que dans une difference sensible.

2o. L'égalité des sons entre ceux que produisent les cordes d'un instrument, dépend du rapport de leurs vibrations. Deux cordes de même matiere, égales dans leurs grosseurs & dans leur longueur, & également tendues, doivent faire dans un même espace de temps un égal nombre de vibrations, quand elles sont pincées de la même maniere. Aussi l'expérience montre qu'elles sont d'accord, & que si dans le tems d'une seconde, l'une fait dix vibrations, l'autre en fait un pareil nombre; & si elles sont pincées en même tems, le tems de chaque vibration de l'une doit être égal au tems de la vibration de l'autre. Des oreilles qui sentent aisément cette égalité sont donc contentes; au lieu qu'elles sont troublées, & comme inquietes, quand il n'y a aucun rapport exact qui se puisse exprimer par nombres entre leurs vibrations, en la même maniere que ce qui est confus & sans ordre déplait à la vue.

3o. L'égalité seroit néanmoins desagréable, si la varieté ne prévenoit le dégoût qu'elle pourroit causer. Il y a une varieté qui s'allie avec l'égalité, & qui peut ainsi satisfaire les oreilles; car si par exemple, après un certain intervalle de tems deux cordes commencent & finissent exactement leurs vibrations; mais que dans cet espace l'une faisant une vibration, l'autre en fasse deux; ou lors qu'une en fait deux,

deux, l'autre en faſſe trois, il eſt évident que la varieté & l'égalité s'y rencontrent, & que leurs mouvemens s'accommodent. Les oreilles ſentent & diſtinguent aiſément cette alliance, ſi le rapport de leurs vibrations s'exprime avec de petits nombres ; car je ne crois pas que l'oreille la plus fine pût remarquer l'accord des vibrations de deux cordes, ſi dans le tems par exemple que l'une en fait quarante-neuf, l'autre en faiſoit préciſément cinquante.

C'eſt l'expérience qui a fait connoitre que trois cordes d'inſtrumens également groſſes & tendues, dont la longueur eſt comme ces trois nombres 3. 4. 6. forment ces trois principaux accords de la Muſique; ſavoir, l'Octave, la Quinte, & la Quarte, quand elles ſont pincées. De deux de ces cordes qui ſeront l'une à l'autre comme 3 à 6, ou 1 à 2, la plus courte fera deux vibrations dans le tems que la plus longue n'en fera qu'une ; ce qui fait l'octave. De ces trois cordes les deux qui ſont l'une à l'autre comme 6 à 4, ou 3 à 2, la plus courte fera trois vibrations contre deux de la plus longue, ou ſix contre quatre ; c'eſt cet accord qu'on nomme la quinte. Enfin deux de ces trois cordes dont la plus courte fera quatre vibrations dans le tems que l'autre n'en fera que trois, feront quand on les pince en même tems ou ſucceſſivement, cet accord qui ſe nomme la quarte.

Ainſi l'expérience a fait connoitre que ces trois nombres 3. 4. 6. expriment la proportion qui fait les principaux accords de la Muſique, & c'eſt pour cela que cette proportion ſe nomme *Harmonique* ; car l'harmonie c'eſt l'accord des ſons. Or remarquez en ces trois nombres que comme le premier 3 eſt au dernier 6, la

difference du premier & du ſecond, c'eſt-à-dire de 3 avec 4, qui eſt 1, eſt à la difference du ſecond & du troiſieme, c'eſt-à-dire de 4 & 6 dont la difference eſt 2, ce qui ſe peut exprimer ainſi.

3. 6 :: 4—3. 6—4.

Prenez garde à cette expreſſion qui eſt la même que celle-ci, 3. 6 :: 1. 2. c'eſt-à-dire que les grandeurs que ces deux expreſſions marquent ſont les mêmes 4—3=1 & 6—4=2. Vous voyez en quel ſens ou comment la proportion Harmonique eſt compoſée de la proportion Arithmetique & de la proportion Géometrique. On y conſidere l'égalité de la difference, ainſi l'Arithmetique s'y trouve; & la Géometrique, puis qu'il y a auſſi égalité de raiſons.

CHAPITRE II.

Proprietez de la Proportion Harmonique.

DEFINITION.

LA proportion Harmonique arrive lors que les nombres ſont tels que le plus petit eſt au plus grand géometriquement, comme l'excès du moyen ſur le plus petit eſt à l'excès du plus grand ſur le moyen; ou comme la difference du premier & du deuxieme à la difference du deuxieme & du troiſieme.

Ces nombres 3. 4. 6. ſont en proportion Harmonique, car le plus petit 3 eſt moitié de 6 le plus grand, comme l'excès du moyen 4 ſur le plus petit 3 eſt à l'excès du plus grand 6 ſur le moyen 4.

3. 6 :: 4—3. 6—4.

PRE-

PREMIERE PROPOSITION.

Problême premier.

Ces deux termes 12 *&* 5 *d'une proportion Harmonique étant donnez, trouver le troiſieme.*

J'appelle x ce troiſieme terme qui m'eſt inconnu & que je cherche. Voilà donc les trois termes 12. 5. x de la proportion Harmonique donnés. Suivant la définition de la proportion Harmonique,

$$12.\ x :: 12-5.\ 5-x.$$

Ce que je puis exprimer de cette maniere, car $12-5=7$.

$$12.\ x :: 7.\ 5-x.$$

Le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens, Liv. III. n. 67. Donc

$$60-12x=7x.$$

Ajoutant à ces grandeurs égales de part & d'autre $12x$ ſelon les règles des additions, cela produit

$$60=19x.$$

Et diviſant ces deux grandeurs égales par 19, cela fait

$$\frac{60}{19}=x.$$

Ainſi le troiſieme terme que je cherchois eſt $\frac{60}{19}$, c'eſt-à-dire, le quotient de 60 diviſé par 19.

SECONDE PROPOSITION.

Théorême premier.

Toutes les fois que la difference de deux nombres eſt plus grande que le plus petit des deux, on ne peut pas en montant trouver un troiſieme nombre en proportion Harmonique.

Soit 5 & 12 dont la difference 7 eſt plus grande que 5. Soit x le troiſieme terme, je dis qu'il ne peut pas être plus grand que 12, car ſuppoſé que 5. 12. x. ſoient en proportion Harmonique, alors

5. x :: 12 — 5 ou 7. x — 12.

Or d'autant que 7 eſt plus grand que 5, il faudroit que x — 12 fût plus grand que x; ce qui eſt impoſſible, qu'une partie de x ſoit plus grande que toute la grandeur entiere x.

Troisieme Proposition.

Théorême ſecond.

Une proportion Harmonique peut diminuer à l'infini, mais non pas augmenter.

Ces trois nombres 4. 6. 12. ſont en proportion Harmonique, c'eſt-à dire que

4. 12 :: 6 — 4. 12 — 6.

ou ce qui eſt la même choſe,

4. 12 :: 2. 6.

Il faut donc démontrer qu'on ne peut pas continuer cette proportion en l'augmentant, c'eſt-à-dire trouver un troiſieme terme plus grand que 12, qui avec 6 faſſe une proportion Harmonique qu'on puiſſe ainſi augmenter. Suppoſons qu'on puiſſe trouver ce troiſieme terme: quel qu'il ſoit, nommons-le x. Voyons ſi la ſuppoſition eſt poſſible: en premier lieu je puis ainſi exprimer cette ſuppoſition.

6. x :: 12 — 6. x — 12.

Or ſi x eſt plus grand que 12, comme on le ſuppoſe; il faudroit que le même nombre 12 — 6 ou 6, eût un même rapport avec l'entier x qu'avec

vec une partie de x, ſavoir, avec $x - 12$; ce qui eſt abſurde. S'il eſt donc vrai, comme on le ſuppoſe, que

$$6.\ x :: 12 - 6.\ x - 12.$$

il faut que x le troiſieme terme ſoit plus petit que 12. Cette démonſtration fait donc voir que la proportion Harmonique ne ſe peut pas augmenter à l'infini, mais elle peut diminuer; car on peut trouver x qui ſera plus petit, comme on l'a fait dans la premiere Propoſition.

PROPOSITION QUATRIEME.

Troiſieme Théorême.

Trois grandeurs étant en proportion Arithmetique, les produits. 1°. *de la premiere par la ſeconde,* 2°. *de la premiere par la troiſieme,* 3°. *de la deuxieme par la troiſieme, ſont en proportion Harmonique.*

Soient $a, b, c.$ en proportion Arithmetique; après avoir multiplié 1°. a par b, 2°. a par c, 3°. b par c, il faut prouver que ces trois produits ab, ac, bc, ſont en proportion Harmonique; & qu'ainſi, ſelon la Définition précédente, $ab.\ bc :: ab - ac.\ ac - bc$. Puis que $\div\ a.\ b.\ c.$ donc Liv. III. n. 19. $a + c = 2b$. Multipliant $a + c$ & $2b$ grandeurs égales par abc, les produits ſeront égaux. On aura ainſi une équation dont ayant réduit les deux membres aux plus ſimples termes, elle ſe trouvera être

$$a^2bc + abc^2 = 2ab^2c$$

ou $$a^2bc - ab^2c = ab^2c - abc^2.$$

Mais $a^2bc - ab^2c$ eſt le produit de ab multiplié par $ac - bc$, comme $ab^2c - abc^2$ eſt le produit de bc & de $ab - ac$, donc ces qua-

tre grandeurs ſont proportionnelles. Liv. III. n. 70.

$$ab.\ bc :: ab-ac.\ ac-bc.$$

qui eſt ce qu'il falloit prouver. Car ſelon la définition de la proportion Harmonique, ces trois produits ab, ac, bc, ſont en cette proportion.

COROLLAIRE.

Donc ayant trois nombres en proportion Arithmetique ÷ 6. 4. 2. *ces trois produits* 6×4, 6×2. 4×2. *ou* 24. 12. 8. *ſeront en proportion harmonique.*

CINQUIEME PROPOSITION.

Théorême quatrieme.

Si on diviſe la même grandeur par des diviſeurs qui ſoient en progreſſion Arithmetique, les quotiens de la diviſion ſeront proportionnels harmoniquement.

Soit a diviſé par les termes de cette progreſſion $\div b.\ b+d\ b+2d$, les quotiens de ces diviſeurs ſont $\frac{a}{b}\ \frac{a}{b+d}\ db\ \frac{a}{b+2d}$. Soit $\frac{a}{b}=e$, & $\frac{a}{b+d}=f$ & $\frac{a}{b+2d}=g$; ainſi il faut prouver que $e.g :: e-f.\ f-g$. Les quotiens de la même grandeur ſont entre eux réciproquement comme les diviſeurs, Liv. III. n. 74. Ainſi, $e.f :: b+d.\ b$; partant *dividendo* $e-f.\ f :: b+d-b.\ b$. Puis que $+b-b=$ zero: Donc

$$e-f.\ f :: d.\ b.$$

par le même raiſonnement,

$f.\ g :: b+2d.\ b+d.$ donc *convertendo*,

$f.\ f-g :: b+2d.\ b+2d-b-d.$

Or

Or $b+2d-b-d=d$, donc

$f.\ f-g\ ::\ b+2d.\ d.$

On vient de voir que $e-f.\ f\ ::\ d.\ b.$

donc *ex proportione perturbata*, Liv. III. n. 73. $e-f.\ f-g\ ::\ b+2d.\ b.$

Or $e.g\ ::\ b+2d.\ b$: car comme on vient de le voir, e eſt le quotient de a diviſé par b, comme g eſt le quotient de a diviſé par $b+2d$, dont les quotiens de la même grandeur étant entre eux réciproquement comme les diviſeurs, Liv. III. n. 74. $e.g::b+2d.b::e-f.f-g.$ donc $e.g::e-f.f-g$, qui eſt ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Diviſant ce nombre 60 par cette progreſſion Arithmetique 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c. les quotiens ſeront en proportion Harmonique.

Les quotiens ſont 60. 30. 20. 15. 12. 10. qui par le Théorême précédent doivent être en proportion Harmonique, ainſi ils font une progreſſion Harmonique; car 60. 20 :: 60 — 30. 30 — 20; & 30. 15 :: 30 — 20. 20 — 15, & 20. 12 :: 20 — 15. 15 — 12, & 15. 10 :: 15 — 12. 12 — 10. Ces nombres ſont donc une progreſſion Harmonique.

Si on vouloit avoir une plus longue progreſſion Harmonique, il faudroit continuer la progreſſion Arithmetique, & ſi elle avoit ſept termes multiplier 60 par 7, ce qui feroit 420, lequel nombre diviſé par les ſept termes de la progreſſion Arithmetique, donneroit une nouvelle progreſſion Harmonique, ſavoir, 420. 210. 140. 105. 84. 70. 60. Vous voyez que c'eſt-là une autre progreſſion, qui continue la premiere, mais en deſcendant, comme nous avons vu que cela ſe pouvoit faire.

TRAI-

TRAITÉ

Des Combinaiſons & des changemens d'ordre.

CHAPITRE PREMIER.

Ce que c'eſt que Combinaiſon. Comment on trouve les Combinaiſons poſſibles de deux & de pluſieurs choſes.

LE mot de Combinaiſon ne ſignifie proprement que la maniere de prendre pluſieurs choſes deux à deux, & de trouver toutes les differentes diſpoſitions qu'elles peuvent avoir ainſi priſes. Mais on donne une ſignification plus étendue à ce mot. On l'entend de la maniere de trouver généralement toutes les diſpoſitions que peuvent avoir, ſoit deux, ſoit pluſieurs choſes, ſelon qu'on les voudra prendre, non ſeulement deux à deux, mais trois à trois, quatre à quatre, & de quelque autre façon, en les ajoutant, en les multipliant, ſelon qu'il ſera néceſſaire. Changement d'ordre, c'eſt lors que l'on change leur ordre de la maniere dont nous donnerons des exemples, après avoir expliqué les Combinaiſons.

Les Combinaiſons ſont d'uſage dans une infinité de rencontres. Souvent pour ne ſe point tromper, il faut faire des dénombremens exacts. La difficulté eſt d'être aſſuré de cette exactitude, c'eſt-à-dire que rien n'a échapé; ce qu'on

qu'on obtient par le ſecours des Combinaiſons. Voilà en quoi conſiſte tout leur art. Comme dans toute l'Arithmetique, il faut 1°. *Faire par parties ce qu'il ſeroit impoſſible de faire tout d'un coup, en ne commençant que par des Combinaiſons fort ſimples.*

2°. *Il faut faire avec ordre les premieres Combinaiſons.*

3°. *Il faut tirer des conſéquences de ce qu'on a découvert en faiſant les premieres Combinaiſons.*

Un exemple rendra ſenſibles ces trois Règles, auxquelles je réduis tout l'art des Combinaiſons. On verra comme les premieres Combinaiſons ſimples & aiſées font découvrir tout ce qu'on peut ſavoir des Combinaiſons compoſées, ſans qu'on ſoit obligé de les faire.

On propoſe de connoître le nombre de tous les mots poſſibles qu'on peut faire des vingt-quatre lettres de l'Alphabet, faiſant les uns de deux lettres, les autres de trois, les autres de quatre, juſques à les faire de vingt-quatre lettres. Cette propoſition paroît d'abord fort difficile, & cependant il eſt facile de la réſoudre en ſuivant les trois règles qu'on vient de donner. Car premierement, je n'entreprendrai pas de faire la choſe tout d'un coup, & je ne commencerai que par des Combinaiſons aiſées. Je verrai donc combien on peut faire de mots de deux lettres; ce que je ferai par parties; car je n'examinerai d'abord qu'en combien de manieres chaque lettre peut être combinée avec les autres lettres. En ſecond lieu, ſuivant la ſeconde règle, je garderai un ordre naturel; car puis que la lettre *a* eſt la premiere de l'Alphabeth, je commencerai par elle ces Combinaiſons, & je ſuivrai l'ordre des lettres. Il me ſera donc

donc facile de trouver qu'on peut combiner la lettre *a* avec les 24 de l'Alphabeth en 24 manieres que voilà: *aa*, *ab*, *ac*, *ad*, *ae*, *af*, *ag*, *ah*, *ai*, *ak*, *al*, *am*, *an*, *ao*, *ap*, *aq*, *ar*, *as*, *at*, *au*, *ax*, *ay*, *az*, &c.

Maintenant je dois faire ce que la troiſieme règle m'avertit de faire, qui eſt de conſiderer cette premiere combinaiſon qui eſt très-ſimple, d'y faire attention, & de voir ce que j'en puis conclure. Il eſt évident que ce que j'ai fait en commençant par *a*, je le puis faire en commençant par *b*; c'eſt-à-dire combinant *b* la ſeconde lettre avec les 24 lettres, ſuivant le même ordre, diſant: *ba*, *bb*, *bc*, &c. par conſéquent puis que chaque lettre ſe combine en 24 manieres differentes, où elle tient toujours la premiere place; on peut donc faire vingt-quatre fois vingt-quatre, c'eſt-à-dire 576 combinaiſons differentes, ou mots de deux lettres. Ainſi cette premiere combinaiſon ſimple & aiſée de *a* avec les lettres de l'Alphabet me fait découvrir le nombre de tous les mots de deux lettres, & je vois bien que s'il les falloit tous écrire, je le pourrois faire ſans qu'il m'en échapât un.

Cette premiere & ſeule combinaiſon me donne encore une plus grande connoiſſance, & pour le dire en un mot, elle me fait connoitre tout ce que je cherche. Car pour trouver tous les mots de trois lettres, je n'ai qu'à garder le même ordre, combinant chacun de ces mots de deux lettres avec chacune des vingt-quatre lettres. Par exemple, comme le premier mot étoit *aa*, diſant *aaa*, *aab*, *aac*, &c. d'où il eſt évident que comme je combinerai chaque mot de deux lettres en 24 manieres differentes, les combinant avec

avec les 24 lettres de l'Alphabet, le nombre des mots de trois lettres ſera vingt-quatre fois plus grand que celui des mots de deux lettres ; ainſi multipliant 576 par 24;ce qui fait 13824, j'aurai le nombre des mots de trois lettres, ſans faire aucune combinaiſon.

Il n'en faut pas davantage, car j'apperçois qu'en combinant chacun de ces mots de trois lettres avec les 24 lettres, gardant toujours le même ordre, diſant par exemple *aaaa*, *aaab*, *aaac*, *&c.* le nombre des mots de quatre lettres doit être 24 fois plus grand ; ce qui me découvre une proportion ou progreſſion qui regne ici ; ſavoir, que le nombre des mots de quatre lettres ſera 24 fois plus grand que celui des mots de trois lettres : que le nombre des mots de cinq lettres ſera 24 fois plus grand que celui des mots de quatre lettres ; & qu'ainſi ces Combinaiſons augmentent dans une même proportion. On peut donc connoître tout d'un coup après avoir fait cette premiere Combinaiſon ſimple, combien par exemple il y auroit de mots faits de treize lettres, & ſi l'on veut, quel ſeroit le nombre de toutes les Combinaiſons enſemble. Car une progreſſion étant donnée, connoiſſant le premier terme & la raiſon qui regne, il eſt facile de connoître quelque autre de ſes termes qui ſoit propoſé, & la ſomme de tous les termes.

Ce ſeul exemple ſuffit pour comprendre l'art des Combinaiſons. On trouve toujours de la même maniere une certaine proportion qui regne. On la découvre d'abord lors qu'on commence par les Combinaiſons les plus ſimples, & qu'on ſuit un ordre naturel. Voyons-le dans ce ſecond exemple. On demande en combien de manieres on peut combiner les dix premiers chif-

chiffres 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. en les prenant deux à deux, après trois à trois, continuant juſques à dix. La valeur des chiffres dépendant de leur place, il faut bien conſiderer en les combinant qu'ils gardent la même place: 12 & 21 ne ſont pas une même choſe. Ainſi commençant la Combinaiſon par 1, il faut le mettre à la premiere place; & on trouvera d'abord que le nombre de ces Combinaiſons fera une progreſſion dans laquelle regne la raiſon décuple.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.
11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 10.

Vous voyez que les dix premiers chiffres pris ſeuls, ſont le premier terme de cette progreſſion. Le chiffre 1 combiné avec chacun de ces dix chiffres, fait dix combinaiſons; partant chacun des dix étant ainſi combinez,

21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 20.

combinant, dis-je, tous les autres chiffres en la même maniere, cela fera cent Combinaiſons.

Cela ſeul vous fera connoître que les dix chiffres pris de la même maniere trois à trois, feront mille combinaiſons. Ainſi tout d'un coup on voit le nombre de combinaiſons que ces dix chiffres peuvent faire pris par exemple ſept à ſept; & quel eſt le nombre de toutes les combinaiſons, qui ſera la ſomme d'une progreſſion. Par des chiffres on peut entendre quelque choſe qu'on voudra; & on voit comment, quel que ſoit leur nombre, il eſt facile d'en trouver toutes les combinaiſons poſſibles.

CHA-

CHAPITRE II.

Les Combinaiſons ſe font differemment, ſelon la fin pour laquelle on les fait.

ON peut avoir differentes vues en faiſant les Combinaiſons : les unes ſont inutiles à la fin qu'on ſe propoſe, & celles-là ſe doivent connoître pour les exclure, ou pour les éviter, afin qu'elles ne brouillent point. Des exemples feront comprendre ce qu'on veut faire remarquer ici. En même tems on verra comme les combinaiſons ſont d'uſage dans les choſes mêmes qui ſemblent n'avoir aucune liaiſon avec les Mathématiques. On appelle *ſyllogiſme*, un raiſonnement compoſé de trois propoſitions, qui ſont néceſſairement ou des propoſitions univerſelles affirmatives, comme eſt celle-ci, *Tous les hommes ſont mortels :* ou des propoſitions univerſelles négatives, comme celle-ci, *Aucun homme n'eſt immortel.* Ou ces propoſitions ſont particulieres & affirmatives, comme, *Il y a des hommes ſavans.* Ou enfin ces propoſitions ſont particulieres négatives, *Il y a des hommes qui ne ſont pas raiſonnables.* On marque avec ces quatre voyelles *A. E. I. O.* la qualité de ces propoſitions. *A* marque une propoſition univerſelle affirmative. *E* une propoſition univerſelle négative. *I* une propoſition particuliere affirmative. *O* une propoſition particuliere négative. Or cette affirmation ou négation, univerſalité ou particularité des trois propoſitions dont un ſyllogiſme eſt compoſé, eſt ce qu'on appelle *mode d'un ſyllogiſme*, lequel mode

mode ſe marque avec trois de ces quatre voyelles. Si ces propoſitions ſont toutes univerſelles affirmatives, ſon mode ſera *AAA*. Ainſi pour ſavoir combien on peut faire de differens ſyllogiſmes, quant à cette qualité de leurs trois propoſitions, il faut voir en combien de manieres on peut combiner ces quatre voyelles *A. E. I. O.* prenant trois de ces voyelles à la fois, par exemple ou *AAA* ou *AAE*, ou *AAI* ou *AAO*. Vous voyez devant vos yeux toutes ces Combinaiſons, & l'ordre que j'ai tenu.

1.	Aaa.	17.	Eee.	33.	Iii.	49.	Ooo.
2.	Aea.	18.	Eae.	34.	Iai.	50.	Oao.
3.	Aia.	19.	Eie.	35.	Iei.	51.	Oeo.
4.	Aoa.	20.	Eoe.	36.	Ioi.	52.	Oio.
5.	Aee.	21.	Eaa.	37.	Iaa.	53.	Oaa.
6.	Aii.	22.	Eii.	38.	Iee.	54.	Oee.
7.	Aoo.	23.	Eoo.	39.	Ioo.	55.	Oii.
8.	Aae.	24.	Eea.	40.	Iia.	56.	Ooa.
9.	Aai.	25.	Eei.	41.	Iie.	57.	Ooe.
10.	Aao.	26.	Eeo.	42.	Iio.	58.	Ooi.
11.	Aei	27.	Eai.	43.	Iae.	59.	Oae.
12.	Aeo.	28.	Eao.	44.	Iao.	60.	Oai.
13.	Aie.	29.	Eia.	45.	Iea.	61.	Oea.
14.	Aio.	30.	Eio.	46.	Ieo.	62.	Oei.
15.	Aoe.	31.	Eoa.	47.	Ioa.	63.	Oia.
16.	Aoi.	32.	Eoi.	48.	Ioe.	64.	Oie.

J'ai ſuivi celui de l'Alphabet, & commençant par *A*, j'ai trouvé ſeize Combinaiſons, dans leſquelles *A* tient la premiere place; ainſi je vois que puiſqu'il y a quatre voyelles *A. E. I. O.* il doit y avoir quatre fois ſeize ou ſoixante quatre Combinaiſons. Il peut donc y avoir ſoixante-

qua-

quatre differens ſyllogismes. C'eſt aux Philoſophes qui enſeignent l'art de raiſonner, d'examiner ſi tous ces ſoixante-quatre modes ſont bons. Ils établiſſent des règles, ſelon leſquelles par exemple on ne peut rien conclure de deux propoſitions négatives: ainſi ces modes, *EEE*, *EOE*, & ſemblables, ne ſont pas concluans. De deux propoſitions particulieres on ne peut non plus rien conclure; & jamais la derniere propoſition ne peut être plus étendue que les premieres. Suivant ces règles & quelques autres, un Logicien peut marquer les ſyllogismes qui ſont bons ou mauvais, & traiter avec la clarté & l'exactitude des Mathématiques cette matiere.

Voyons la même choſe dans l'exemple ſuivant; & comment on doit exclure les combinaiſons inutiles au deſſein pour lequel on les fait. On demande en combien de manieres ſe peuvent combiner les ſept Planetes. La choſe ſeroit aiſée, ſi c'étoit toutes leurs combinaiſons poſſibles qu'on cherchât. Déſignons premierement les ſept Planetes par les ſept premieres lettres de l'Alphabet. *a* marque le Soleil, *b* la Lune, ainſi de ſuite. Si on combine *a* avec lui-même & avec les autres lettres ſuivantes, cela fera ces ſept combinaiſons, *aa. ab. ac. ad. ae. af. ag.* combinant de même chacune des ſept Planetes, cela fera ſept fois ſept, c'eſt-à-dire 49 combinaiſons. Si on combinoit *aa* premierement avec lui-même, *aaa*, *aab*, *aac*, & qu'on fît la même choſe des 49 combinaiſons précédentes, on en trouveroit ſept fois quarante-neuf, c'eſt-à-dire 343; ce qui montre que ces combinaiſons ſont une progreſſion dont la raiſon eſt ſeptuple. Mais toutes ces combinaiſons ne

ſont

ſont pas utiles, ſi l'on demande que la même Planete ne ſe trouve point deux fois dans une même combinaiſon, ou qu'on ne la combine point avec elle-même, qu'ainſi il faille exclure des combinaiſons, qu'on cherche, ces combinaiſons *aa. bb. cc. &c.* On peut auſſi demander que celles qui ont les mêmes lettres ne ſoient comptées que pour une; que par exemple *ab* & *ba*, ne ſoient pas comptées pour deux differentes combinaiſons, comme effectivement le Soleil & la Lune, & la Lune & le Soleil ne ſont qu'une même choſe. Alors le nombre des combinaiſons ſera bien plus petit; car en premier lieu il faudra exclure ces ſept combinaiſons, où une lettre eſt combinée avec elle même, comme *aa. bb. cc. &c.* Ainſi de 49 il en faut déja retrancher 7, reſte 42. Or dans celles qui reſtent ſe trouvent encore *ab* & *ba*, *ac* & *ca*, *&c.* qui ne peuvent être pris que pour une combinaiſon, il en faut donc retrancher la moitié; ainſi de 42 il ne reſte que 21 combinaiſons des ſept Planetes, les prenant deux à deux, ſelon les conditions propoſées.

Voici la maniere d'exclure toutes les combinaiſons qu'on regarde ici comme inutiles. Puis qu'on ne peut pas combiner chaque Planete avec elle-même, je ne dois combiner *a* à la premiere qu'avec les ſix lettres ſuivantes; ce qui ne fait donc que ſix combinaiſons. Venant à combiner *b*, comme cette lettre a déja été combinée avec *a*, je ne la puis combiner qu'avec les cinq dernieres lettres. Je ne ferai donc que cinq combinaiſons differentes. Par la même raiſon la troiſieme lettre *c* ne peut être combinée qu'avec quatre, la quatrieme *d* qu'avec trois, la cinquieme qu'avec deux, la ſixieme qu'avec une, la ſeptie-

ſeptieme ſe trouve déja dans les combinaiſons précédentes. Ainſi il n'y a d'utiles que ces combinaiſons qui ſont cette progreſſion.

÷ 6. 5. 4. 3. 2. 1.

La ſomme de cette progreſſion eſt 21.

Pour combiner les Planetes trois à trois, il faut combiner ces 21 combinaiſons trouvées ou $6+5+4+3+2+1$. Mais comme je ne puis pas combiner *a* avec ſoi-même, & qu'il ſe trouve dans les 6 premieres combinaiſons, je ne le combine qu'avec les combinaiſons ſuivantes qui ſont $5+4+3+2+1$, ce qui ne fait que 15 nouvelles combinaiſons. *b* ſe trouve auſſi dans ſix combinaiſons, ſavoir *ab. cb. db. eb. fb. gb.* & dans ces cinq autres, ſavoir *bc. bd. be. bf. bg.* Je n'en puis donc faire de nouvelles combinaiſons qu'avec $4+3+2+1$, ce qui fait 10.

Par les mêmes raiſons je ne puis combiner *c* qu'avec $3+2+1$, ce qui fait 6. & *d* qu'avec $2+1$, & *e* qu'avec $+1$. Ainſi ces combinaiſons des ſept Planetes priſes trois à trois ne font que $15+10+6+3+1$; ce qui fait trente-cinq.

Par cette méthode on trouvera qu'on ne peut faire que 35 combinaiſons des ſept Planetes les prenant quatre à quatre. 21 ſi on les prenoit cinq à cinq. 7 ſi on les prend ſix à ſix: & une ſeule combinaiſon ſi on les prend toutes ſept; car dans cette ſeule combinaiſon *abcdefg* elles ſe trouvent toutes; ainſi il ne peut pas y avoir d'autres combinaiſons de ces ſept lettres. Toutes les combinaiſons des ſept Planetes deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'on les prenne toutes ſept, ſont donc au nombre de 120, qui ſe pourroit

trouver tout d'un coup par le moyen d'une progreſſion : ce qu'il faut voir, & ce qui prouvera ce que nous avons dit, qu'en faiſant les combinaiſons avec ordre, on découvre des progreſſions qui abregent l'opération.

Une ſeule choſe ne peut ſe prendre qu'une fois ſéparément de toute autre. Deux choſes comme *a* le Soleil, & *b* la Lune, ne ſe peuvent joindre que d'une maniere ; car *ab* & *ba* ne ſont pas deux conjonctions differentes. Si nous ajoutons *c* une troiſieme Planete, ces trois Planetes *a. b. c.* pourront faire quatre conjonctions *ab*, *ac*, *bc*, & cette quatrieme *abc* qui comprend ces trois Planetes. Quatre Planetes peuvent faire ces onze conjonctions que voilà, *ab. ac. ad. bc. bd. cd. abc. abd. acd. bcd. abcd.* Quand on prend les Planetes ſéparément, cela s'appelle leur disjonction. Or ſi on ajoute au nombre de leurs conjonctions celui de leur disjonction : par exemple, à celui de la conjonction de deux Planetes, qui eſt 1, ce nombre 2 de leur disjonction : de même qu'on ajoute à 4, qui eſt le nombre des conjonctions de trois Planetes, celui de leur disjonction qui eſt 3 ; & à 11 celui de la conjonction de quatre Planetes, celui de leur disjonction qui eſt 4, vous aurez ces nombres,

1. 3. 7. 15.

Ajoutez-y l'unité, & viendra

2. 4. 8. 16.

Ces nombres ſont une progreſſion dans laquelle regne la raiſon double. Nous avons vu qu'on pourroit trouver 120 conjonctions des Planetes, toutes differentes. Ajoutez à ce nombre 120 leurs disjonctions, qui ſont 7, cela fera 127. Or ayant ôté l'unité de chacun des termes de cette progreſſion double,

÷ 1.

÷ 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128.

viendront ces nombres

1. 3. 7. 15. 31. 63. 127.

Ainſi vous voyez que le ſeptieme terme de cette ſuite de nombres donne toutes les conjonctions & disjonctions poſſibles des ſept Planetes.

Il ſemble que cela ne s'accorde pas avec ce que nous avons dit ci-deſſus, qu'il y avoit 21 combinaiſons des ſept Planetes priſes deux à deux : 35 quand elles ſont priſes trois à trois, &c. Mais dans ces combinaiſons nous les prenions toutes ſept. Nous combinions, par exemple, *a* avec les ſix autres ; au lieu que dans ces combinaiſons dont le nombre eſt exprimé par ces nombres 1. 3. 7. 15. &c. on conſidere les Planetes en premier lieu comme s'il n'y en avoit que deux ; enſuite, qu'il n'y en eût que trois. Mais de quelque maniere qu'on faſſe ces combinaiſons, toutes les conjonctions & disjonctions poſſibles des ſept Planetes ou des ſept choſes, fait toujours préciſément 127. Nous avons trouvé 120 combinaiſons ; ajoutez les 7 disjonctions, cela fait ce nombre 127.

CHAPITRE III.

Des Changemens d'ordre.

IL eſt auſſi utile de conſiderer comment on peut découvrir tous les changemens poſſibles d'un certain nombre de choſes, par exemple, en combien de differentes manieres on pourroit changer l'ordre de ſix perſonnes aſſiſes à une même table. Il ne faut point d'autres règles que

celles que j'ai propoſées pour les combinaiſons.

1°. *Il faut commencer par examiner les changemens les plus ſimples.*

2°. *Obſerver un ordre dans cet examen.*

3°. *Et reconnoitre s'il n'y a point quelque eſpece de proportion, laquelle étant trouvée, on puiſſe juger par les premiers changemens ſimples & faciles, de tous ceux qui ſont plus compoſez.*

Je me ſers des lettres de l'Alphabet, dont je ſuis l'ordre. Une ſeule lettre comme *A* ne peut pas recevoir de changement. Quand on la joint avec une ſeconde lettre, comme avec *B*, puis qu'on peut mettre *B* devant ou après, *AB* ou *BA*, cela fait deux changemens; ainſi deux lettres ſe peuvent changer en deux manieres. Si j'ajoute une troiſieme lettre *C*: comme on peut mettre *C* dans trois places de *AB*, ſavoir ou au commencement, *CAB*, ou au milieu *ACB*, ou à la fin, *ABC*; & qu'on peut faire la même choſe dans *BA*, plaçant *C*, en trois endroits, ou au commencement, ou au milieu, ou à la fin, *CBA*, *BCA*, *BAC*, comme vous le voyez,

ABC *BAC* *CAB*
ACB *BCA* *CBA*

je connois que je puis diſpoſer trois lettres, & par conſéquent trois choſes, en ſix manieres. Si j'ajoute *D* une quatrieme lettre; comme, en chacun des ſix changemens dont trois lettres ſont capables, il y a quatre places où je puis mettre *D*, par exemple dans *ACB*, je puis mettre *D* en quatre endroits differens, écrivant ou *DACB*, ou *ADCB*, ou *ACDB* ou *ACBD*: ſi, dis-je, j'ajoute une quatrieme lettre, ces 4 lettres, & partant 4 choſes, ſeront capables de 4 fois 6 differens changemens, c'eſt-à-dire de 24 changemens. Il n'en faut pas davantage pour me

faire

faire appercevoir que cinq choſes ſeront capables de 5 fois 24 changemens, c'eſt à-dire de 120: Que multipliant 120 par 6, ce produit 720 ſera le nombre des changemens de 6 lettres: Et 5040 produit de 720 par 7, le nombre des changemens de 7 lettres: 40320 produit de 5040 par 8, le nombre des changemens de 8 lettres: 362880 produit de 40320 par 9, le nombre des changemens de 9 lettres: Et qu'enfin 3628800 produit de 362880 par 10, eſt le nombre des changemens poſſibles de dix lettres, & par conſéquent de dix hommes aſſis à une même table.

La règle générale, c'eſt d'écrire les termes de la progreſſion naturelle. Chacun de ces termes marquera le nombre des choſes ou des lettres, dont on cherche les différens changemens. Sous cette progreſſion il faut ranger les continuels produits des termes de deſſus, comme vous le voyez.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.
1. 2. 6. 24. 120. 720. 5040. 40320. 362880.

Le produit des deux termes naturels 1 & 2 c'eſt 2; ce produit multiplié par le troiſieme terme c'eſt 6, que j'écris ſous 3. ce 6 me fait connoitre que trois choſes reçoivent 6 changemens. Je multiplie le produit 6 par 4, j'en écris le produit 24 ſous 4. Enſuite je multiplie 24 par 5, & j'écris 120 le produit ſous 5. Je continue de même. Je trouve, par exemple, que ſix choſes peuvent changer en 720 manieres differentes. Ainſi pour connoitre de combien de changemens ſont capables 7 lettres, je n'ai qu'à multiplier 720 par 7, & le produit 5040 eſt le nombre de ces changemens.

Ceci peut ſervir à trouver tous les changemens poſſibles des lettres du nom d'une perſon-

ſonne, de maniere qu'elles faſſent un autre nom qui ait un ſens obligeant ou ſatyrique, ſelon qu'on veut louer ou blâmer. C'eſt ce qu'on appelle faire des *Anagrammes*; dont l'art ne conſiſte qu'à trouver tous les changemens poſſibles des lettres d'un nom. On les compte, & auſſi-tôt on connoit combien elles peuvent recevoir de differens changemens. Vous pourrez remarquer la difference qu'il y a entre les combinaiſons & changemens d'ordre. Proprement, combiner, c'eſt un certain nombre de choſes étant donné, les prendre les unes après les autres, ou deux à deux, ou trois à trois. Dans le changement d'ordre, on ne fait que changer la place des choſes qui ſont propoſées. Quand la même lettre ſe trouve pluſieurs fois dans un nom, on lui donne differentes figures, comme en ce nom *Jeſus*, où il y a deux *ſ*, il en faut faire une italique & l'autre romaine, ou l'une majuſcule & l'autre petite, pour les diſtinguer. Ces cinq lettres reçoivent 120 changemens, ainſi on en peut faire autant de noms parmi leſquels on choiſit ceux qui ſignifient quelque choſe. Quand le nombre des choſes dont on cherche les changemens eſt grand, ce nombre eſt prodigieux; par exemple, celui des changemens des dames d'un damier, & des pieces d'un Jeu d'échecs. Qui le croiroit, s'il n'y en avoit démonſtration, que dix hommes aſſis à une même table peuvent changer de place en 3628800 manieres differentes?

On peut faire pluſieurs queſtions ſur le changement d'ordre; par exemple, celle-ci. En combien de manieres on peut changer l'ordre des mots de ce vers Latin,

Tot tibi ſunt dotes, virgo, quot ſidera cœlo,

de ſorte que ce ſoit toujours un vers Latin.

Pour

Pour entendre le détail de ce qu'on doit faire, il faut avoir quelque connoiſſance de la Poëſie Latine; & je n'écris que pour des François. Ceux qui ſavent les règles de cette Poëſie, & qui gardent les trois règles que nous avons données pour les combinaiſons & les changemens d'ordre, trouveront aiſément en combien de manieres ce vers ſe peut changer ſans perdre ſa meſure; ou de ſorte que ce ſoit toujours un vers Latin, dont le cinquieme pied ſoit comme il le doit, un *dactile*, & le ſixieme un *ſpondée*. Ainſi, comme dans ce vers, il n'y a que ces dactiles *ſidera & tot tibi*, ou *ſunt tibi*, ou *quot tibi*, il faut que *ſidera* ou *tibi* ſe trouvent toujours au cinquieme pied.

Tot tibi ſunt dotes virgo quot ſidera cœlo,
Sidera quot cœlo tot dotes ſunt tibi virgo.

En changeant ainſi l'ordre de ces mots, on peut faire un nombre infini de differens vers, dont chacun ne ſera compoſé que de ces mots. Mais dans les uns le dernier pied ſera *cœlo*, dans l'autre *virgo*; l'un aura au cinquieme *ſidera*, l'autre *tot tibi*. Tous auront quelque difference, quelque ordre particulier. Le Pere Preſtet, dans la premiere édition de ſes Elémens, compte 2196 changemens poſſibles des mots qui compoſent ce vers. Dans la ſeconde il en trouve 3376, & qu'ainſi de ce ſeul vers on en peut faire ce grand nombre de differens vers qui ſeront tous compoſez des mêmes mots, & qui ne differeront entre eux que parce que ces mots ſeront differemment placez.

CHAPITRE IV.

Moyens de trouver une combinaiſon dont le rang eſt donné dans une ſuite de pluſieurs combinaiſons; ou la combinaiſon étant donnée, trouver ſon rang. Application de ces moyens à la Période Julienne.

CEs moyens ſont utiles dans les occaſions. Voyons-le dans l'application que nous en allons faire à la Période Julienne. Cette Période eſt faite de la multiplication de ces trois cycles : du Solaire de 28 ans, du Lunaire de 19, & de l'Indiction qui eſt une révolution de quinze années. Cette Période eſt une combinaiſon de ces trois cycles, dont je marque les années avec des lettres que vous voyez. Je combine 1°. le cycle ſolaire avec le cycle Lunaire, combinant A avec a & avec toutes les 19 lettres du cycle Lunaire. Cela fait 19 combinaiſons. Combinant enſuite B & toutes les 28 lettres du cycle Solaire avec les 19 du cycle Lunaire, cela fait vingt-huit fois dix-neuf combinaiſons; c'eſt-à-dire 532 toutes differentes. Combinant enſuite ces 532 combinaiſons avec les 15 lettres du cycle des Indictions, cela fait quinze fois cinq cens trente-deux, ou 7980 combinaiſons differentes. On pourroit augmenter ce nombre de combinaiſons, ſi on comptoit les changemens d'ordre, comme ſeroient A a & a A & A a A : mais ce ne ſont pas differentes choſes, non plus que celles-ci K b *D* & b K *D* ou *D* b K. Car il eſt évident que dire

dire le 10. du cycle Solaire, le second du cycle Lunaire, c'eſt la même choſe, que ſi on commençoit par le Lunaire, diſant, le ſecond du cycle Lunaire, le 10. du Solaire.

Cycle Solaire.		*Cycle Lunaire.*		*Cycle des Indictions.*	
A	1	a	1	*A*	1
B	2	b	2	*B*	2
C	3	c	3	*C*	3
D	4	d	4	*D*	4
E	5	e	5	*E*	5
F	6	f	6	*F*	6
G	7	g	7	*G*	7
H	8	h	8	*H*	8
I	9	i	9	*I*	9
K	10	k	10	*K*	10
L	11	l	11	*L*	11
M	12	m	12	*M*	12
N	13	n	13	*N*	13
O	14	o	14	*O*	14
P	15	p	15	*P*	15
Q	16	q	16		
R	17	r	17		
S	18	s	18		
T	19	t	19		
V	20				
X	21				
Y	22				
Z	23				
β	24				
γ	25				
δ	26				
ζ	27				
θ	28				

La Période Julienne eſt une ſuite de 7980 combinaiſons differentes. Chacun de ces trois cycles étant révolu, il recommence. Par exemple, l'année 28. du cycle Solaire, eſt ſuivie de la premiere année du même cycle. Ainſi du cycle Lunaire & du cycle des Indictions. Ces trois cycles commencent & finiſſent, ſans que dans toute la Période qui eſt de 7980 combinaiſons, deux années ayent les mêmes cycles.

I. QUESTION.

Une année des 7980 de la Période Julienne étant donnée, trouver quels ſont les cycles de cette année; & par conſéquent, la combinaiſon caractere de cette année.

IL eſt évident que rejettant autant qu'on le peut un cycle entier de l'année propoſée, ce qui reſte eſt l'année du cycle qu'on cherche. Si par exemple, de cette année 4714 de la Période Julienne, on rejette autant qu'on le peut le cycle Solaire 28, ce nombre 10 qui reſtera, ſera l'an. du cycle Solaire de cette année 4714; puiſqu'après 28 années, le cycle Solaire recommence toujours.

Or pour rejetter un cycle autant qu'on le peut, & trouver ce qui reſte, il faut diviſer l'année propoſée par le cycle entier. Ce n'eſt pas le quotient de cette diviſion qu'on cherche. Mais c'eſt parce que s'il ne reſte rien la diviſion faite, on connoit que c'eſt la derniere année du cycle entier. S'il reſte quelque choſe; ce reſte eſt l'année particuliere du cycle entier. Ainſi pour trouver les trois cycles

cles de l'année 4714, il en faut rejetter les cycles 28. 19. 15. ce qui se fait divisant ce nombre 4714 par ces cycles, 1° par 28. pour connoître quel étoit le cycle Solaire de cette année 4714. La division faite, le reste qui sera 10, donnera ce cycle. De même pour connoître quel sera le cycle Lunaire de la même année, il faut diviser 4714 par 19, le reste 2 sera le cycle Lunaire de cette année. Enfin en le divisant par 15, le reste 4 marquera que l'Indiction étoit 4. Prenant ensuite les lettres qui sont vis-à-vis des années 10. 2. 4. en chaque cycle, on trouvera cette combinaison *K b D*, qui ne se trouve que dans cette année 4714.

La premiere année de l'Ere Chrétienne a ces mêmes cycles; partant cette premiere année convient avec l'année 4714. de la Période Julienne, qui est ainsi nommée, parce qu'on la joint avec nos années qui ont été règlées par Jules-César, d'où elles ont été appellées les années Julieunes. On trouve ainsi les cycles de toutes les autres années de la Période Julienne, qui seront données.

On pourroit aussi proposer cette question: Les années de chaque cycle étant données, trouver l'année de la Période Julienne à laquelle ils conviennent. Par exemple, on suppose qu'on sache qu'une certaine année avoit 10 de cycle Solaire, 2 de cycle Lunaire, & 4 d'Indiction: on demande quelle est l'année de la Période Julienne à laquelle conviennent ces trois cycles. Ce Problême se trouve résolu dans plusieurs Livres de Mathématiques. Comme il a quelque difficulté, & que mon but n'est que de donner des Elémens faciles, je n'en

n'en parlerai point ici. Ceux qui auront bien compris ces Elémens, auront une Introduction pour entendre des Livres plus difficiles que le mien, & pénétrer, s'ils le ſouhaitent, plus avant dans des Sciences qui méritent fort d'être cultivées.

FIN.